Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger

Elementare Geometrie:
Einige Fragen zur Lernkontrolle

1 Topologische Grundbegriffe

1. Kann man jede Menge zu einem topologischen Raum machen? Kann eine Teilmenge eines topologischen Raumes zugleich offen und abgeschlossen sein?
2. Gibt es auf $\mathbb{R}$ eine Topologie, in der jede offene Umgebung von 0 auch jede offene Umgebung von 100 schneidet?
3. Wie beweist man, dass metrische Räume hausdorffsch sind?
4. Geben Sie für einen beliebigen metrischen Raum (X,d) eine neue Metrik d' an, so dass der maximale Abstand von zwei beliebigen Punkten $x_1, x_2 \in X$ bezüglich d' höchstens 1 ist.
5. Gegeben seien topologische Räume $(X, \mathscr{O}_X)$ und $(Y, \mathscr{O}_Y)$. Wie ist die Produkttopologie auf $X \times Y$ definiert? Sind alle offenen Mengen in der Produkttopologie von der Form $U \times V$ für U offen in X und V offen in Y?
6. Was ist eine stetige Abbildung? Geben Sie je zwei Beispiele von stetigen (bzw. nicht stetigen) Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sowie von S^1 nach S^1 an.
7. Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Wieso ist die natürliche Projektion $\pi : X \to X/\sim$ stetig?
8. Beweisen Sie: (a) Die Standard-Sphäre S^n ist nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^n$. (b) Die Sphäre S^n ohne $k \geq 1$ Punkte ist homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ohne $k-1$ Punkte.
9. Wie ist „zusammenhängend“, wie „weg-zusammenhängend“ definiert? Wieso zerfällt ein topologischer Raum in disjunkte Zusammenhangskomponenten? Ist ein weg-zusammenhängender topologischer Raum zusammenhängend? Gilt die Umkehrung?
10. Beweisen Sie: $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ sind nicht homöomorph.
11. Wieso ist das stetige Bild einer kompakten Menge kompakt? Was sind die kompakten Teilräume von $\mathbb{R}^n$? Begründen Sie Ihre Antwort.
12. Was ist eine topologische Gruppe? Geben Sie 3 Beispiele an. Kann man jede Gruppe zu einer topologischen Gruppe machen?

2 Mannigfaltigkeiten, Simplizialkomplexe, Verklebungen

1. Was ist eine topologische Mannigfaltigkeit? Was ist ein Simplizialkomplex? Was versteht man unter der „Dimension" einer Mannigfaltigkeit bzw. eines Simplizialkomplexes? Geben Sie Beispiele von Mannigfaltigkeiten und Simplizialkomplexen an. Geben Sie ein Beispiel eines (eindimensionalen) Simplizialkomplexes, der keine Mannigfaltigkeit ist.
2. Was ist der Unterschied zwischen einer topologischen und einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit? Geben Sie für den projektive Raum $P^n\mathbb{R}$ einen Atlas an. Wieso ist $GL(n,\mathbb{R})$ eine Lie-Gruppe?
3. Was ist ein endlicher Graph? Was ist ein Baum? Wie ist die Euler-Charakteristik eines endlichen Graphen bzw. eines simplizialen Komplexes definiert? Was für einen Wert hat die Euler-Charakteristik eines Baumes?
4. Wie definiert man die „Seiten" eines ebenen Graphen? Was haben ebene Graphen mit Polyedern zu tun? Wieso gibt es genau fünf reguläre Polyeder in $\mathbb{R}^3$?
5. Was versteht man unter „Verklebung oder Anheftung" eines Raumes X an Y längs einer Abbildung $f : A \subset X \to Y$? Wie kann man einen Torus bzw. ein Möbiusband durch Verklebung konstruieren?

3 Geometrie von Flächen

1. Was ist eine reguläre Fläche S in $\mathbb{R}^3$? Geben Sie 5 Beispiele an.
2. Wie ist der Tangentialraum T_pS an einen Punkt $p \in S$ definiert? Wie findet man eine explizite Basis von T_pS?
3. Was versteht man unter der ersten Fundamentalform einer regulären Fläche S? Geben Sie Beispiele an.
4. Was ist eine (lokale) Isometrie zwischen regulären Flächen? Kennen Sie ein Kriterium, um zu entscheiden, ob zwei Flächen lokal isometrisch sind? Geben Sie ein Beispiel von zwei lokal aber nicht global isometrischen Flächen an.
5. Wie sind Normalenvektor(en) und zweite Fundamentalform einer regulären Fläche S definiert? Wie berechnet man diese mittels einer gegebenen (lokalen) Parametrisierung von S?
6. Wie ist die Gauß-Krümmung einer regulären Fläche definiert? Kennen Sie Flächen mit konstanter Gauß-Krümmung? Was besagt das "Theorema egregium"? Wie lautet die Formel von Bertrand-Puiseux?
7. Wie ist die geodätische Krümmung einer Flächenkurve definiert und was ist ihre geometrische Bedeutung? Wie verändert sich die geodätische Krümmung einer Kurve, wenn diese rückwärts durchlaufen wird? Wie lautet die lokale Version des Satzes von Gauß-Bonnet und wie diejenige für Polygone? Was besagt letztere im Fall von geodätischen Dreiecken?
8. Was versteht man unter der Euler-Charakteristik einer kompakten orientierbaren 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit M^2 und welche Werte kann sie annehmen? Wie ist das Geschlecht einer kompakten 2-Mannigfaltigkeit definiert? Wie hängen Geschlecht und Euler-Charakteristik zusammen?
9. Wie lautet der globale Satz von Gauß-Bonnet und was sind die Beweis-Ideen?

4 Nichteuklidische Geometrie

1. Was ist eine Riemannsche Metrik auf einer offenen Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$? Geben Sie 3 Beispiele für Riemannsche Metriken auf $(0,1) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$. Wie kann man eine solche Riemannsche Mannigfaltigkeit zu einem metrischen Raum machen?
2. Wie ist das Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene definiert? Was sind die Geodätischen in dieser Geometrie? Wieso gilt das Parallelen-Axiom in der hyperbolischen Ebene nicht?
3. Wie definiert man Winkel in der hyperbolischen Geometrie? Wieso ist die Winkelmessung im Poincaré-Modell die gleiche wie in der oberen Halbebene versehen mit der euklidischen Metrik?
4. Welche geometrischen Eigenschaften von hyperbolischen Dreiecken sind ganz anders als bei euklidischen Dreiecken?
5. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Winkeln und dem Flächeninhalt eines hyperbolischen Dreicks? Gibt es einen solchen Zusammenhang auch in der euklidischen Geometrie?
6. Mit welcher Formel kann man die Krümmung von H^2 berechnen? Was ist deren Wert?