Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

18. Januar 2018

Probeklausur Elementare Geometrie (WS 2017/2018)

Name, Vorname:			
Matrikelnummer:		Tutorium:	
Fachrichtung:		Semester:	

Zur Bearbeitung: Verwenden Sie für die Bearbeitung jeder Aufgabe ein neues Blatt, auf welches Sie die *Nummer der Aufgabe* sowie *Ihren Namen* schreiben.

Zur Bewertung: Jede Aufgabe wird mit bis zu 4 Punkten bewertet, so dass Sie insgesamt 24 Punkte erhalten können. Zum Bestehen der Klausur genügen 10 Punkte.

Punkte (wird von den Prüfern ausgefüllt)							
1	2	3	4	5	6	$\boldsymbol{\Sigma}$	**Note**

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Wie ist die Euler-Charakteristik eines endlichen Graphen definiert?

b) Geben Sie ein Beispiel für einen endlichen Graphen G mit $\chi(G) = 4$ an.

c) Kann die Euler-Charakteristik eines zusammenhängenden, endlichen Graphen negativ sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Die projektive Ebene kann auf zwei verschiedene Arten definiert werden:

1. $P_1 = S^2/_{\sim}$, wobei $x \sim y \;:\Leftrightarrow\; y = \pm x$,
2. $P_2 = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/_{\approx}$, wobei $x \approx y \;:\Leftrightarrow\; \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : y = \lambda x$.

a) Geben sie einen Homöomorphismus zwischen P_1 und P_2 an.

b) Zeigen Sie, dass die projektive Ebene kompakt ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $X := S^2 \setminus \{(0,0,1),(0,0,-1)\}$ und $Y := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ jeweils versehen mit den von der Standardtopologie induzierten Teilraumtopologien.

Geben Sie einen expliziten Homöomorphismus zwischen X und Y an.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Wie ist die Hausdorff-Eigenschaft eines topologischen Raums definiert?

b) Zeigen Sie, dass metrische Räume hausdorffsch sind.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sei $x : \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$, $(u,v) \mapsto (u,v,u^2-v^2)$ eine Parametrisierung der Fläche $S = x(\mathbb{R}^2)$.

Bestimmen Sie die erste und zweite Fundamentalform von x sowie die Gauß-Krümmung von S in jedem Punkt.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei $U := (0,1) \times (0,\pi)$. Gegeben seien die parametrisierten Flächenstücke

$$x : U \to \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \mapsto (u\cos v, u\sin v, u)$$

und

$$\tilde{x} : U \to \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \mapsto \left(\sqrt{2}u\cos\frac{v}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}u\sin\frac{v}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

a) Skizzieren Sie $x(U)$ und $\tilde{x}(U)$.

b) Geben Sie eine explizite lokale Isometrie zwischen $x(U)$ und $\tilde{x}(U)$ an.