



WINTERSEMESTER 2006/07

Vorlesung über

Ergodentheorie geodätischer Flüsse

In der klassischen Mechanik studiert man den zeitlichen Verlauf gewisser physikalischer Systeme wie Kreisel, ideales Gas, Himmelskörper usw. Wird das System zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ durch einen Punkt x im Phasenraum X beschrieben, so ist das System zum Zeitpunkt t durch einen Punkt $\Phi_t(x) \in X$ dargestellt.

Sind die das System beschreibenden Differentialgleichungen unabhängig von t , so gilt $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$ für alle Zeiten t, s . In diesem Fall nennt man Φ_t eine Einparametergruppe von Transformationen. Ein wichtiges Beispiel einer solchen Einparametergruppe ist der geodätische Fluss auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit.

Da man oft nicht in der Lage ist, eine explizite Formel für Φ_t anzugeben, versucht man zumindest, das Verhalten von $\Phi_t(x)$ für große Zeiten t zu verstehen. Ist der betrachtete Raum X kompakt, wie es in vielen physikalischen Problemstellungen aufgrund der Energieerhaltung der Fall ist, verfügen wir über ein endliches, Φ_t -invariantes Maß auf X . Die Ergodentheorie erlaubt nun eine qualitative Beschreibung des asymptotischen Verhaltens von $\Phi_t(x)$.

In der Vorlesung werden zunächst elementare dynamische Systeme wie Bernoullisysteme, Hamilton'sche Systeme und Billiards besprochen. Es folgen einige zentrale Sätze aus der Ergodentheorie, insbesondere der Satz der Wiederkehr von Poincaré und der Ergodensatz von Birkhoff.

Im zweiten Teil der Vorlesung untersuchen wir den geodätischen Fluss einer kompakten Riemannschen Fläche mit konstanter Krümmung -1 als Beispiel einer wichtigen Klasse von dynamischen Systemen, den sogenannten Anosov Systemen.

Vorlesung: Montag, 11:30 h – 13:00 h, S31, und
Freitag, 9:45 h – 11:15 h, S33.

Beginn: 23.10.2006

Literatur:

Der erste Teil der Vorlesung orientiert sich an einem Text von Yves Benoist und Frédéric Paulin, der unter <http://www.dma.ens.fr/~benoist/prepubli/03sysdyn.pdf> zum Download verfügbar ist und eine Menge exzellenter Referenzen enthält.

Weitere empfehlenswerte Bücher über Ergodentheorie, die zum Teil weit über den in der Vorlesung behandelten Stoff hinausgehen, sind auf der Webseite zur Vorlesung <http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/mi2leuz/lehre/ergtheo2006w/> aufgelistet.

* * *

Die Vorlesung richtet sich an Diplomstudierende der Mathematik und Physik sowie Studierende des Lehramts ab dem 5. Semester. Vorkenntnisse in Differentialgeometrie sind von Vorteil, jedoch nicht zwingend notwendig.