Einige Grundbegriffe zur Vorlesung „Ergodentheorie geodätischer Flüsse“

1 Topologie

Ein topologischer Raum ist ein Paar $(X, \mathcal{T})$ bestehend aus einer Menge X und einem System von Teilmengen von X, sodass gilt

$$\begin{aligned} & X, \emptyset \in \mathcal{T} & & \\ & U, V \in \mathcal{T} & \Longrightarrow \quad & U \cap V \in \mathcal{T} \\ & (U_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T} & \Longrightarrow \quad & \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i \in \mathcal{T}\,. \end{aligned}$$

Das Teilmengensystem $\mathcal{T}$ nennt man eine Topologie von X, die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen offene Teilmengen von X. Eine Menge $F \subseteq X$ heißt abgeschlossen genau dann, wenn ihr Komplement $F^c := X \setminus F$ offen ist.

Eine Basis von $\mathcal{T}$ ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ mit der Eigenschaft, dass sich jedes $U \in \mathcal{T}$ als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ schreiben lässt.

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist selbst wieder ein topologischer Raum versehen mit der Teilraumtopologie: Eine Menge $O \subseteq A$ ist offen genau dann, wenn $U \in \mathcal{T}$ existiert mit $U \cap A = O$.

Sei $x \in X$. Eine Teilmenge $V \subseteq X$ heißt Umgebung von $x \in X$, wenn es eine offene Menge $U \in \mathcal{T}$ gibt mit $x \in U \subseteq V$. Ein topologischer Raum ist hausdorffsch, wenn zu je zwei verschiedenen Punkten in X disjunkte offene Umgebungen existieren.

Sei $A \subseteq X$ eine Menge. Das Innere A^o von A ist die Vereinigung aller offenen Teilmengen von A, der Abschluss $\overline{A}$ von A ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die A enthalten. A heißt dicht in X, falls $\overline{A} = X$.

Eine Teilmenge $K \subseteq X$ heißt kompakt, wenn jede Überdeckung von K durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Ein topologischer Raum heißt zusammenhängend, wenn er sich nicht in zwei nichtleere disjunkte offene Teilmengen zerlegen lässt.

Eine Metrik d auf einer Menge X ist eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y, z \in X$ gilt:

$$\begin{aligned} & d(x,y) \geq 0 \quad \text{mit Gleichheit genau dann, wenn } x = y \\ & d(x,y) = d(y,x) \\ & d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)\,. \end{aligned}$$

Ein metrischer Raum ist ein Paar (X, d) bestehend aus einer Menge X und einer Metrik d auf X. Eine Metrik auf X induziert in natürlicher Weise eine Topologie auf X: Eine Menge $O \subseteq X$ ist offen, falls für alle $x \in O$ ein $\varepsilon > 0$ existiert sodass der Ball $B_\varepsilon(x) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ ganz in O enthalten ist. Umgekehrt heißt ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar, wenn eine Metrik auf X existiert, die $\mathcal{T}$ induziert.

Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{S})$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. f heißt stetig, falls die Urbilder von offenen Mengen in Y offen in X sind. Ist f bijektiv und stetig mit stetiger Umkehrabbildung f^{-1}, so heißt f Homöomorphismus. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt eigentlich genau dann, wenn die Urbilder kompakter Mengen in Y kompakte Teilmengen von X sind.

Seien I eine abzählbare Indexmenge, $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ eine Menge topologischer Räume und $Y := \prod_{i \in I} X_i$ das kartesische Produkt der Mengen X_i, $i \in I$.

$$\mathcal{B} := \{\prod_{i \in I} U_i : U_i \in \mathcal{T}_i\ ,\ \exists\ F \subseteq I \text{ endlich mit } U_i = X_i \quad \forall\ i \in I \setminus F\}$$

ist Basis einer Topologie auf Y, der sogenannten Produkttopologie.

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Für $x \in X$ bezeichne $[x] := \{z \in X : z \sim x\}$ die Äquivalenzklasse von x. Sei $X/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen und $\pi : X \to X/\sim$, $x \mapsto [x]$ die natürliche Projektion. Die Quotiententopologie auf $X/\sim$ ist folgendermaßen definiert: Eine Menge $U \subseteq X/\sim$ ist offen genau dann, wenn $\pi^{-1}(U)$ offen ist in X. Diese Konstruktion der Topologie für den Quotientenraum $X/\sim$ macht π zu einer stetigen Abbildung.

2 Maßtheorie

Sei X eine Menge. Eine Familie $\mathcal{A}$ von Teilmengen von X heißt Algebra, falls

$$\begin{aligned} \emptyset &\in \mathcal{A} & & \\ A &\in \mathcal{A} &\implies& \quad A^c := X \setminus A \in \mathcal{A} \\ A, B &\in \mathcal{A} &\implies& \quad A \cup B \in \mathcal{A}\,. \end{aligned}$$

Gilt außerdem

$$(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \quad \implies \quad \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}\,,$$

so heisst $\mathcal{A}$ σ-Algebra.

Eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ heißt von einer Familie $\mathcal{F}$ von Teilmengen von X erzeugt, falls jede σ-Algebra, die $\mathcal{F}$ enthält, auch $\mathcal{A}$ enthält.

Sind X, Y Mengen und $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ σ-Algebren auf X bzw. Y, so heißt die von den Mengen

$$\{A \times B : A \in \mathcal{A}\ ,\ B \in \mathcal{B}\}$$

erzeugte σ-Algebra $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ auf dem kartesischen Produkt $X \times Y$ das Produkt der σ-Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Ist X ein topologischer Raum, so heißt die von den offenen Mengen $\mathcal{T}$ von X erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}$ die Borel'sche σ-Algebra von X. Elemente der Borel'schen σ-Algebra werden auch Borelmengen genannt.

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf einer Menge X, und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine Abbildung. μ heißt Maß auf X, falls $\mu(\emptyset) = 0$ und μ abzählbar additiv ist, d.h. falls für jede Familie $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ paarweise disjunkter Teilmengen von X folgende Gleichung gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)\,.$$

Satz (Hahn-Kolmogorov Erweiterungssatz)

Sei X eine Menge, $\mathcal{A}_0$ eine Algebra von Teilmengen von X und $\mu_0 : \mathcal{A}_0 \to [0, \infty]$ eine Abbildung mit $\mu_0(\emptyset) = 0$ und $\mu_0\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_0(A_i)$ für jede Familie $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_0$ paarweise disjunkter Teilmengen von X mit $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}_0$. Ist $\mathcal{A}$ die von $\mathcal{A}_0$ erzeugte σ-Algebra, so existiert ein eindeutiges Maß $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit $\mu|_{\mathcal{A}_0} = \mu_0$.

Ein Maßraum ist ein Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$, wobei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Maß auf X ist. X heißt σ-endlich unter μ, falls X als abzählbare Vereinigung $X = \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ geschrieben werden kann mit $A_i \in \mathcal{A}$ und $\mu(A_i) < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Gilt $\mu(X) = 1$, so heißt X Wahrscheinlichkeitsraum und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf X.

Das Lebesgue-Maß auf der Borel'schen σ-Algebra $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^N$ ist das eindeutige Maß λ mit der Eigenschaft

$$\lambda([a_1, b_1] \times \ldots \times [a_N, b_N]) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_N - a_N)\,.$$

Eine Menge $C \subseteq X$ heißt Nullmenge, falls $A \in \mathcal{A}$ existiert mit $C \subseteq A$ und $\mu(A) = 0$. Zwei Mengen $C, D \subset X$ heißen äquivalent modulo Null ($C = D(\text{mod } 0)$ falls

$$C \bigtriangleup D := \big(C \setminus (C \cap D)\big) \cup \big(D \setminus (C \cap D)\big)$$

eine Nullmenge ist.

Wir sagen, eine Eigenschaft für Punkte einer Menge $S \subseteq X$ gilt fast überall (f.ü.) in S, falls die Menge von Punkten in S, für die die Eigenschaft nicht gilt, eine Nullmenge ist. Insbesondere schreiben wir für Teilmengen $A, B \subseteq X$

$$A \subseteq B \quad \text{f.ü.}\,,$$

falls $A \setminus (A \cap B)$ eine Nullmenge ist.

Satz (Produktmass)

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche Maßräume und $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ das Produkt der σ-Algebren $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$. Dann existiert ein eindeutiges Maß $\mu \otimes \nu$ auf $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ mit

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \forall\ A \in \mathcal{A} \quad \forall\ B \in \mathcal{B}\,.$$

$(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ heißt das Produkt der Maßräume $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$.

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt messbar, falls Urbilder von Elementen in $\mathcal{B}$ in $\mathcal{A}$ liegen. Insbesondere ist eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ messbar, falls Urbilder von Borelmengen in $\mathbb{C}$ Elemente von $\mathcal{A}$ sind.

Sind $f : X \to Y$ und $g : X \to Y$ messbare Abbildungen, so schreiben wir $f = g$ f.ü. genau dann, wenn die Menge $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ eine Nullmenge in X ist. Diese Eigenschaft definiert eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf der Menge aller messbaren Abbildungen von X nach Y:

$$f \sim g \quad :\Longleftrightarrow \qquad f = g \quad \text{f.ü.}$$

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für $C \subseteq X$ bezeichne $\mathbb{I}_C$ die charakteristische Funktion von C, d.h. $\mathbb{I}(x) = 1$ für $x \in C$ und $\mathbb{I}(x) = 0$ für $x \in C^c$. Eine Funktion $s : X \to \mathbb{C}$ heißt einfach, falls s in der Form

$$s = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbb{I}_{A_i}$$

mit $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $A_i \in \mathcal{A}$, $1 \leq i \leq N$, geschrieben werden kann. Gilt außerdem

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mu(A_i) < \infty \,,$$

so heißt s integrierbar und

$$\int_X s \, d\mu = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mu(A_i)$$

das Integral von s. Man kann zeigen, dass diese Zahl nicht von der Zerlegung von s in charakteristische Funktionen abhängt. Eine Funktion $g : X \to \mathbb{C}$, die nicht einfach ist, heißt integrierbar, falls eine Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einfacher integrierbarer Funktionen $s_n : X \to \mathbb{C}$ existiert mit den Eigenschaften

$$\lim_{n \to \infty} s_n(x) = g(x) \quad \text{für fast alle } x \in X \,.$$

$$\lim_{n,m \to \infty} \int_X |s_n - s_m| \, d\mu = 0 \,.$$

In diesem Fall wird das Integral von g definiert durch

$$\int_X g \, d\mu := \lim_{n \to \infty} \int_X s_n \, d\mu \,.$$

Es kann gezeigt werden, dass dieser Limes existiert und unabhängig von der gewählten Folge (s_n) ist. Integrierbare Funktionen sind nicht notwendigerweise messbar, stimmen aber mit einer solchen f.ü. überein.

Für $p \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ definieren wir nun mit Hilfe obiger Äquivalenzrelation $\sim$ die Banachräume

$$\mathbb{L}^p(\mu, \mathbb{K}) := \{f : X \to \mathbb{K} : f \text{ messbar}, \int_X |f|^p \, d\mu < \infty\} / \sim \,.$$

Mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle := \int_X f \cdot \bar{g} \, d\mu$ wird $\mathbb{L}^p(\mu, \mathbb{K})$ zu einem Banachraum.