Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Geometrische Gruppentheorie II — Winter-Semester 2015/16

Übungsblatt 1 — **28.10.2015**

Aufgabe 1 *(Hyperkugeln)*

Die n-dimensionale Einheitskugel ist definiert als

$$K_n := \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$$

Berechnen Sie das Volumen von K_n und verifizieren Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} Vol(K_n) = 0$.

Aufgabe 2 *(Punktspiegelungen)*

Die Punktspiegelung σ_P an einem Punkt $P \in \mathbb{H}^2$ (bzw. $\mathbb{S}^2$) weist jedem Punkt $z \in \mathbb{H}^2$ (bzw. $\mathbb{S}^2$) einen Punkt $\sigma_P(z) \in \mathbb{H}^2$ (bzw. $\mathbb{S}^2$) zu, sodass z, P und $\sigma_P(z)$ auf einer Geodätischen liegen und P die Strecke von z nach $\sigma_P(z)$ halbiert.

1. Zeigen Sie, dass für jedes $P \in \mathbb{H}^2$ die Punktspiegelung σ_P eine Isometrie ist.
2. Zeigen Sie, dass für jedes $P \in \mathbb{S}^2$ die Punktspiegelung σ_P eine Isometrie ist.

Aufgabe 3 *(Iwasawa-Zerlegung)*

a) Zeigen Sie, dass jedes Element $g \in SL(n, \mathbb{R})$ eine eindeutige Darstellung $g = kan$ als Produkt von Elementen $k \in SO(n)$, $a \in A$ und $n \in N$ besitzt.
Hierbei bezeichnet A die (abelsche) Gruppe der Diagonalmatrizen mit positiven Diagonaleinträgen und Determinate 1

$$A := \left\{ \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \mid \lambda_i > 0 \text{ für alle } i \text{ und } \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

und N die (nilpotente) Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Diese Zerlegung heißt *Iwasawa-Zerlegung*.

b) Berechnen Sie die Iwasawa-Zerlegung von $g = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$.

Hinweis: *Benutzen Sie das Gram-Schmidt-Verfahren.*

Aufgabe 4 *(Wohldefiniertheit)*

a) Zeigen Sie, dass der Raum der unimodularen Gitter wohldefiniert ist, d.h.

$$\left(SO(n)\backslash SL(n,\mathbb{R})\right)/SL(n,\mathbb{Z}) \cong SO(n)\backslash\left(SL(n,\mathbb{R})/SL(n,\mathbb{Z})\right)$$

b) Seien r und $\widehat{r}$ wie in der Vorlesung. Zeigen Sie, dass

$$\max_{\substack{L \text{ unimodulares} \\ \text{Gitter in } \mathbb{R}^n}} r(L) = \max_{[g]\in\widetilde{\mathcal{G}_n}} \widehat{r}([g])$$

gilt.