Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Geometrische Gruppentheorie II Winter-Semester 2015/16

Übungsblatt 11 **26.01.2016**

Aufgabe 1 *(Duale symmetrische Räume)*

Zwei symmetrische Räume $S = G/K$ und $S^* = G^*/K^*$, deren Riemannsche Metrik jeweils durch die Killing-Form B bzw. B^* induziert ist, heißen *dual*, falls gilt

(1) es existiert ein Lie-Algebra-Isomorphismus $\widetilde{\delta} : \mathfrak{k} \longrightarrow \mathfrak{k}^*$, sodass

$$B^*(\widetilde{\delta}V, \widetilde{\delta}W) = B(V, W) \qquad \text{für alle } V, W \in \mathfrak{k},$$

(2) es existiert eine lineare Isometrie $\delta : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}^*$, sodass

$$[\delta X, \delta Y] = -\widetilde{\delta}[X, Y] \qquad \text{für alle } X, Y \in \mathfrak{p}.$$

a) Zeigen Sie, dass duale symmetrische Räume S und S^* entgegengesetzte Schnittkrümmung haben, d.h.

$$K(\delta(\Pi)) = -K(\Pi) \qquad \text{für jede Ebene } \Pi \subset T_{x_0}S \cong \mathfrak{p}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Grassmann-Mannigfaltigkeiten

$$\mathrm{O}(p+q)/(\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)) \quad \text{und} \quad \mathrm{O}(p,q)/(\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q))$$

duale symmetrische Räume sind.

Aufgabe 2 *(Abelsche Unteralgebren)*

Es sei G/K ein symmetrischer Raum mit Cartan-Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$.
Zeigen Sie, dass jede Lie-Unteralgebra $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ abelsch ist.