Karlsruher Institut für Technologie

**Institut für Algebra and Geometrie**
**Prof. Dr. Enrico Leuzinger**
**M. Sc. Moritz Gruber**

## Geometrische Gruppentheorie II — Winter-Semester 2015/16

**Übungsblatt 12** — **02.02.2016**

---

**Aufgabe 1** *(Weylkammern)*

In $\mathfrak{a}_0 = \mathrm{Diag}_0 \subseteq T_{x_0}\,\mathrm{Pos}(3)$ sei die Weylkammer

$$\mathfrak{a}^+ := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \text{ und } \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \right\}$$

gegeben.
Bestimmen Sie

a) die übrigen Weylkammern,

b) für ein beliebiges $H \in \mathfrak{a}^+$ alle $k \in \mathrm{SO}(3)$ mit $\mathrm{Ad}(k)H \in \mathfrak{a}^+$,

c) für $H_1 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ die $\mathrm{SO}(3)$-Bahn in $\mathfrak{a}_0$,

d) und die Stabilisatoren von $H_1$ und $H_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{SO}(3)$.

**Aufgabe 2** *(Weyl-Gruppe)*

Es seien $\mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{a}^+$ wie in Aufgabe 1. Weiter seien $\sigma_1$ und $\sigma_2$ die euklidischen Spiegelungen an den *Wänden* $\{\lambda_1 = \lambda_2\}$ bzw. $\{\lambda_2 = \lambda_3\}$ von $\mathfrak{a}^+$. Die von $\sigma_1$ und $\sigma_2$ erzeugte Spiegelungsgruppe $W$ heißt *Weyl-Gruppe*. Zeigen Sie:

a) $W$ ist isomorph zur symmetrischen Gruppe $S_3$ von 3 Elementen.

b) $W$ operiert einfach-transitiv (das heißt mit trivialen Stabilisatoren) auf der Menge der Weylkammern von $\mathfrak{a}_0$.