Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Geometrische Gruppentheorie II — Winter-Semester 2015/16

Übungsblatt 2 — **03.11.2015**

Aufgabe 1 *(Tangentialraum und Differential)*

Zeigen Sie:

a) Es seien M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\varphi = (x_1, ..., x_n)$ lokale Koordinaten um einen Punkt $p \in M$. Dann ist

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \right\}$$

eine Basis von T_pM.

b) Es sei $F : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Ist $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine Kurve in M mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v \in T_pM$, so gilt

$$dF_p(v) = \frac{d}{dt}(F \circ c)\Big|_{t=0}.$$

Aufgabe 2 *(Lie-Klammer)*

Zeigen Sie für $X, Y, Z \in \mathcal{V}M$ und $a, b \in \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften der durch $[X, Y] := XY - YX$ definierten Lie-Klammer:

(i) $[Y, X] = -[X, Y]$ (Schiefsymmetrie)

(ii) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ ($\mathbb{R}$-Bilinearität)

(iii) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (Jacobi-Identität)

Aufgabe 3 *(Christoffel-Symbole)*

Es sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita Zusammenhang D. In lokalen Koordinaten gilt

$$D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Berechnen Sie die Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k in Abhängigkeit von $g_{ij} := \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$.

Aufgabe 4 *(Starrheit von Isometrien)*

Es sei M eine zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit.
Beweisen Sie die folgende Aussage:
Sind Φ und Ψ Isometrien von M und es gibt ein $p \in M$ mit $\Phi(p) = \Psi(p)$ und $d\Phi_p = d\Psi_p$, so ist $\Phi = \Psi$.