Karlsruher Institut für Technologie

**Institut für Algebra and Geometrie**
**Prof. Dr. Enrico Leuzinger**
**M. Sc. Moritz Gruber**

## Geometrische Gruppentheorie II — Winter-Semester 2015/16

**Übungsblatt 4** — **17.11.2015**

---

**Aufgabe 1** *(Matrix-Exponentialfunktion)*

Zeigen Sie, dass für $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ gilt: $\det(\mathrm{e}^A) = \mathrm{e}^{\mathrm{Spur}\, A}$

**Aufgabe 2** *(Campbell-Baker-Hausdorff-Formel)*

Es sei $G$ eine $n$-dimensionale Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathfrak{g}$. Zeigen Sie für $X, Y \in D := \{X \in \mathfrak{g} : \|X\| \leq 1\}$:

(i) $\exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX) = \exp(tY + t^2[X,Y] + O(t^3))$

(ii) $\exp(-\sqrt{t}X)\exp(-\sqrt{t}Y)\exp(\sqrt{t}X)\exp(\sqrt{t}Y) = \exp(t[X,Y] + O(t^{3/2})$

**Aufgabe 3** *(Heisenberg Gruppe)*

Die *Heisenberg-Gruppe* $H^{2+1}$ ist die folgende 3-dimensionale Lie-Untergruppe von $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$:

$$H^{2+1} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Zeigen Sie, dass die zugehörige Lie-Algebra $\mathfrak{h}^{2+1}$ durch

$$\mathfrak{h}^{2+1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u & w \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; u, v, w \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben ist.

b) Bestimmen Sie für $A, B \in \mathfrak{h}^{2+1}$ und genügend kleines $t \in \mathbb{R}$ ein $C(t) \in \mathfrak{h}^{2+1}$ mit

$$\mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{e}^{tB} = \mathrm{e}^{C(t)}.$$