Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Geometrische Gruppentheorie II — Winter-Semester 2015/16

Übungsblatt 5 — **24.11.2015**

Aufgabe 1 *(Lokale Isomorphismen)*

Zeigen Sie, dass die Lie-Gruppen $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(2,1)$ und $\mathrm{SU}(1,1)$ lokal isomorph sind.

Aufgabe 2 *(Killing-Form)*

Für die Lie-Gruppen $G = \mathrm{SO}(n)$ bzw. $G = \mathrm{SU}(n)$ mit zugehörigen Lie-Algebren $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$ bzw. $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$ definiert man die *Killing-Form*

$$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}, \quad (X,Y) \mapsto \mathrm{Re}(\mathrm{Spur}(XY)).$$

Zeigen Sie:

a) B ist eine negativ-definite Bilinearform auf $\mathfrak{g}$.

b) B ist $\mathrm{Ad}(G)$-invariant, d.h. für alle $g \in G$ und alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt

$$B(\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y) = B(X,Y).$$

Aufgabe 3 *(Heisenberg Gruppe II)*

Identifizieren Sie die Heisenberg-Gruppe H^{2+1} als Mannigfaltigkeit mit $\mathbb{R}^3$, d.h. betrachten Sie den Diffeomorphismus

$$\varphi : \mathrm{H}^{2+1} \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Dann ist $d\varphi|_E : \mathrm{T}_E\mathrm{H}^{2+1}) \cong \mathfrak{h}^{2+1} \longrightarrow \mathrm{T}_0\,\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ ein Vektorraum-Isomorphismus.

a) Zeigen Sie: Via obigem Isomorphismus sind $A, B, C \in \mathfrak{h}^{2+1}$ mit

$$A := \frac{\partial}{\partial x}, \quad B := \frac{\partial}{\partial y} + x \cdot \frac{\partial}{\partial z}, \quad C := \frac{\partial}{\partial z}$$

linksinvariante Vektorfelder auf H^{2+1}.

b) Berechnen Sie die Lie-Klammern $[A,B]$, $[A,C]$ und $[B,C]$.