Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Geometrische Gruppentheorie II — Winter-Semester 2015/16

Übungsblatt 6 — **01.12.2015**

Aufgabe 1 *(Eine nicht-lineare Lie-Gruppe)*

Die Gruppe $Z := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z} \right\}$ ist eine normale Untergruppe der Heisenberg Gruppe H^{2+1} (vgl. Übungsblätter 4 und 5).
Zeigen Sie, dass die Faktorgruppe H^{2+1}/Z keine Matrix-Lie-Gruppe ist, das heißt topologisch nicht isomorph zu einer linearen Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ für ein n.

Hinweis: *Benutzen Sie (ohne Beweis) die folgende Aussage:*

Lemma: *Sei G eine Untergruppe von $GL(n,\mathbb{C})$ und p eine Primzahl. Gibt es $S, T \in G$, sodass $R := S^{-1}T^{-1}ST$ von Ordnung p ist, und ist $SR = RS$ und $TR = RT$, dann gilt $n \geq p$.*

Aufgabe 2 *(Isolierter Fixpunkt)*

Es sei S ein symmetrischer Raum und $p \in S$.
Zeigen Sie, dass der Punkt p ein isolierter Fixpunkt der geodätischen Spiegelung s_p ist. (Das heißt, es gibt eine Umgebung von p, in der kein weiterer Fixpunkt von s_p liegt.)

Aufgabe 3 *(Hyperboloid Modell des hyperbolischen Raums)*

Es sei q die durch

$$q(x,y) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1}$$

gegebene Bilinearform auf $\mathbb{R}^{n+1}$, sowie $\bar{q}$ die zugehörige quadratische Form $\bar{q}(x) := q(x,x)$. Weiter sei $\mathbb{L}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \bar{q}(x) = \text{-}1 \text{ und } x_{n+1} > 0\}$ die obere Schale des Hyperboloids $\{\bar{q} = \text{-}1\}$.
Zeigen Sie, dass durch

$$\langle u, v \rangle_p := q(u,v) \quad p \in \mathbb{L}^n,\ u, v \in T_p\mathbb{L}^n$$

eine Riemannsche Metrik auf $\mathbb{L}^n$ gegeben ist.