Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Geometrische Gruppentheorie II — Winter-Semester 2015/16

Übungsblatt 7 — **08.12.2015**

Aufgabe 1 *(Ergänzung zu Lemma 2 in Abschnitt 5.3 der Vorlesung)*

Es sei G eine Lie-Transformationsgruppe, die auf einer Mannigfaltigkeit M transitiv operiert. Es sei $p \in M$ und $G_p \subseteq G$ die Isotropiegruppe von p.
Zeigen Sie, dass die Abbildung $\alpha : G/G_p \to M, gG_p \mapsto g \cdot p$ differenzierbar ist.

<u>*Hinweis:*</u>
Sei $\pi : G \to G/G_p$, die natürliche Projektion. Wie im Beweis von Satz 1, Kapitel 4 sei $D_\varepsilon \subset G$ so, dass $\pi|_{D_\varepsilon}$ ein Diffeomorphismus ist. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
D_\varepsilon \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\beta"] \\
\pi(D_\varepsilon) \arrow[r, "\alpha"] & M
\end{tikzcd}$$

(mit $\beta(g) = g \cdot p$) und $\alpha|_{\pi(D_\varepsilon)}$ ist differenzierbar.

Aufgabe 2 *(Isometriegruppe der Sphäre)*

Zeigen Sie, dass die Isometriegruppe der n-Sphäre isomorph zur orthogonalen Gruppe $O(n+1)$ ist.

<u>*Hinweis:*</u>
Betrachten Sie dazu das Rahmenbündel $OS^n := \{(p, B) \mid p \in S^n, B \text{ ONB von } T_pS^n\}$ und identifizieren es mit der Menge der ONBs von $\mathbb{R}^{n+1}$.

Aufgabe 3 *(Zusammenhängende Gruppen)*

Es sei G eine topologische Gruppe und G^0 die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements. Weiter $H \leq G$ eine Untergruppe von G. Zeigen Sie:

a) G^0 ist eine normale Untergruppe von G.

b) Sind H und G/H zusammenhängend, dann ist auch G zusammenhängend.

c) Die Gruppe $\mathrm{SO}(2)$ ist zusammenhängend. Folgern Sie daraus mit Hilfe von Teil (b), dass $\mathrm{SO}(n)$ auch für jedes $n \geq 2$ zusammenhängend ist.