Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Geometrische Gruppentheorie II — Winter-Semester 2015/16

Übungsblatt 8 — **15.12.2015**

Aufgabe 1 *(Ein homogener Raum)*

Auf $\mathbb{R}^n$ sei die folgende symmetrische Bilinearform gegeben:

$$Q(x,y) := -x_1y_1 - \ldots - x_py_p + x_{p+1}y_{p+1} + \ldots + x_ny_n$$

Die zu Q gehörende spezielle indefinite orthogonale Gruppe ist:

$$\mathrm{SO}(p,n-p) := \{A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \mid Q(Ax,Ay) = Q(x,y) \quad \forall x,y\}$$

Dann ist die (nicht-kompakte) Grassmann-Mannigfaltigkeit $\mathrm{Gr}^*_{p,n-p}(\mathbb{R}^n)$ definiert als

$$\mathrm{Gr}^*_{p,n-p}(\mathbb{R}^n) := \{U | U\ p\text{-dim. UVR}, Q|_U \text{ negativ definit}\}.$$

Zeigen Sie, dass die (nicht-kompakte) Grassmann-Mannigfaltigkeit als der homogene Raum

$$\mathrm{Gr}^*_{p,n-p}(\mathbb{R}^n) \cong \mathrm{SO}(p,n-p)\,/\,\mathrm{S}(\mathrm{O}(p)\times\mathrm{O}(n-p))$$

beschrieben werden kann und bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{Gr}^*_{p,n-p}(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 2 *(Ein symmetrischer Raum)*

Es sei H eine zusammenhängende kompakte Lie-Gruppe.
Weiter seien

$$G := H \times H \quad \text{und} \quad K := \{(h,h) \in G \mid h \in H\}$$

sowie

$$\sigma : G \to G\ ,\ (h_1,h_2) \mapsto (h_2,h_1)$$

a) Zeigen Sie, dass G/K ein symmetrischer Raum diffeomorph zu H ist.

b) Bestimmen Sie die geodätische Spiegelung an $x_0 = eK$

c) Bestimmen Sie die Cartan-Involution $\Theta = d\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ und die Geodätischen durch x_0.

Aufgabe 3 *(lokal symmetrische Räume)*

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt *lokal symmetrisch*, falls die geodätischen Spiegelungen s_p lokale Isometrien sind.
Sei nun D der Levi-Civita-Zusammenhang und R der Riemannsche Krümmungstensor von (M, g). Zeigen Sie:
(M, g) ist genau dann lokal symmetrisch, wenn $D_X R = 0$ für alle $X \in \mathcal{V}M$ gilt.