Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Geometrische Gruppentheorie II — Winter-Semester 2015/16

Übungsblatt 3 — **11.11.2015**

Aufgabe 1 *(Grassmann-Mannigfaltigkeit)*

Für $0 \leq k \leq n$ bildet die Menge aller k-dimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$ die Grassmann-Mannigfaltigkeit $G(k,n)$. Definieren Sie Karten für $G(k,n)$ und bestimmen Sie die Dimension.

Aufgabe 2 *(Linksinvariante Vektorfelder)*

Es sei G eine Lie-Gruppe und $X \in \mathcal{V}G$. Dann heißt X *linksinvariant*, falls

$$X(gh) = dL_{g|_h} X(h) \qquad \forall g, h \in G$$

Zeigen Sie:

Sind X, Y linksinvariante Vektorfelder auf G, so ist auch die Lie-Klammer $[X, Y]$ ein linksinvariantes Vektorfeld auf G.

Aufgabe 3 *(Erzeuger von Lie-Gruppen)*

a) Es sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe und $U \subset G$ eine offene Umgebung von e. Zeigen Sie, dass G von U erzeugt wird (das heißt, G ist die kleinste Untergruppe in G, die U enthält).

b) Zeigen Sie, dass $SO(n)$ zusammenhängend ist, aber $O(n)$ nicht.

Aufgabe 4 *(Lie-Algebra)*

Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem Vektorprodukt

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

eine Lie-Algebra ist, die isomorph ist zur Lie-Algebra von $SO(3)$.