Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. K. Spitzmüller

1. Übungsblatt zur Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie (SS 2008)

1. Aufgabe (10 Punkte)

Gegeben seien Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:

a) Ist $\vec{z} \perp \vec{x}$ und $\vec{z} \perp \vec{y}$, so ist $\vec{z} \perp \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Geben Sie für linenar unabhängige Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ eine anschauliche Interpretation dieser Aussage.

b) Genau dann ist $|\vec{x}| = |\vec{y}|$, wenn $(\vec{x} + \vec{y}) \perp (\vec{x} - \vec{y})$ gilt. Geben Sie eine geometrische Veranschaulichung dieser Aussage an.

c) Ist $\vec{z} \perp \vec{x}$ und $\vec{z} \perp \vec{y}$, so sind $\vec{z}$ und $\vec{x} \times \vec{y}$ linear abhängig.

d) $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z})\,\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\,\vec{z}$.

2. Aufgabe (10 Punkte)

Gegeben seien die vier Vektoren

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die einen Untervektorraum $U := [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4]$ des $\mathbb{R}^3$ aufspannen.

a) Zeigen Sie, dass $B := \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ eine Basis von U ist, und berechnen Sie die Komponenten von $\vec{x}_3$ und $\vec{x}_4$ bezüglich der Basis B.

b) Weisen Sie nach, dass

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin U \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in U$$

gilt.

c) Berechnen Sie unter Verwendung der Komponenten des Vektors $\vec{b}$ bzgl. der Basis B die Länge von $\vec{b}$.

d) Bestimmen Sie den Cosinus des Winkels zwischen $\vec{b}$ und $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$ unter Verwendung entsprechender Komponentenvektoren.

3. Aufgabe (10 Punkte)

Recherchieren Sie die folgenden Kurven im Internet und geben Sie jeweils eine Paramterdarstellung und Skizze dafür an.

a) Ellipse

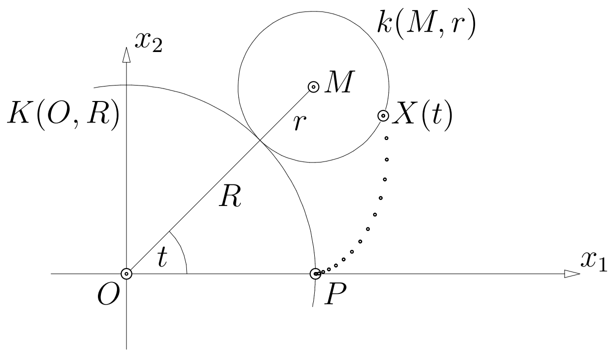
b) Hyperbel

c) Quadratix des Hippias

d) Cardioide

e) Lemniskate von Bernoulli

4. Aufgabe (10 Punkte)



Auf einem Kreis $K(O,R)$ rollt außen ein Kreis $k(M,r)$ ab (vgl. Skizze).
Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung $c\ :\ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0,\infty)$ für diejenige Kurve, welche der auf k liegende Punkt P bei dem Rollvorgang beschreibt. Ausgangslage sei dabei $\vec{x}(0) = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$.

ABGABE bis Montag, den 28. 4. 2008 vor den Übungen.