Universität Karlsruhe
Inst. für Algebra und Geometrie
Dr. K. Spitzmüller

2. Übungsblatt zur Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie (SS 2008)

1. Aufgabe (10 Punkte)
Gegeben sei die vom Parameter r abhängige Kurvenschar

$$c_r \,:\, \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

a) Geben Sie eine geometrische Interpretation dafür an, wie sich diese Kurven durch das Abrollen eines Einheitskreises erzeugen lassen. Leiten Sie daraus her, wie sich der Tangentenvektor in einem Kurvenpunkt aus dem Tangentenvektor eines geeigneten Kreispunktes konstruieren lässt.
b) Skizzieren Sie für $r = \frac{1}{2}$ die zugehörige Kurve $c_{\frac{1}{2}}$ und geben Sie alle Punkte auf $c_{\frac{1}{2}}$ mit horizontaler Tangente an.
c) Skizzieren Sie für $r = 1$ die zugehörige Kurve c_1 und bestimmen Sie alle singulären Punkte von c_1.
d) Skizzieren Sie für $r = 2$ die zugehörige Kurve c_2 und berechnen Sie die höchsten und die tiefsten Punkte von c_2.

2. Aufgabe (10 Punkte)
Gegeben sei die gewöhnlichen Zykloide (vgl. Aufgabe 1c))

$$c \,:\, \vec{x} = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

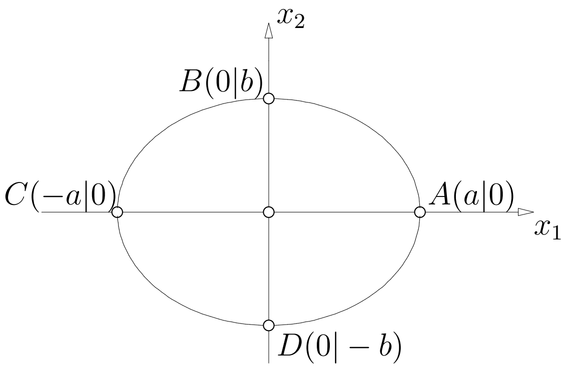
Berechnen Sie reguläre Punkte $X(a)$ und $X(b)$ auf c so, dass die Tangente in $X(a)$ gleichzeitig Normale in $X(b)$ ist.

3. Aufgabe (10 Punkte)
Gegeben sei die ebene Kurve

$$c \,:\, \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{t^2-1}{t^2+1} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

i) Zeigen Sie, dass c regulär ist.
ii) Bestimmen Sie Schnittpunkte von c mit den Achsen, die Punkte von c mit zur x_2-Achse parallelen Tangenten. Zeigen Sie, dass der Ursprung ein Doppelpunkt der Kurve ist, bestimmen Sie die Tangenten in diesem Doppelpunkt und skizzieren Sie c.
Hinweis: Beachten Sie, dass die x_1-Komponente aller Kurvenpunkte stets kleiner als 1 ist.

4. Aufgabe (10 Punkte)



a) Geben Sie für die skizzierte Ellipse eine Parameterdarstellung sowie eine implizite Darstellung an.

b) Weisen Sie die *Brennpuktseigenschaft* der Ellipse nach:
Die Summe der Abstände von Ellipsenpunkten zu den Brennpunkten $F_1(\sqrt{a^2-b^2}|0)$ und $F_2(-\sqrt{a^2-b^2}|0)$ ist konstant.

c) Beweisen Sie die *Leitlinieneigenschaft* der Ellipse:
Es sei $e := \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ sowie $d := \frac{a}{e}$. Für jeden Ellipsenpunkt $X(t)$ bezeichne d_1 den Abstand von der Leitlinie $l_1 : x_1 = d$ und r_1 den Abstand von $X(t)$ zu F_1. Entsprechend sei d_2 der Abstand zur Leitlinie $l_2 : x_1 = -d$ und r_2 der Abstand zum Brennpunkt F_2. Dann gilt:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e$$

d) Berechnen Sie das begleitende FRENET-Zweibein sowie die Krümmung der Ellipse und zeigen Sie, dass die Ellipse vier Scheitel besitzt.

ABGABE am Montag, den 5. 5. 2008 vor den Übungen.