Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. K. Spitzmüller

3. Übungsblatt zur Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie (SS 2008)

1. Aufgabe (10 Punkte)
Es sei

$$k : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a\cosh t \\ b\sinh t \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}\,, \; a > 0, b > 0.$$

a) Zeigen Sie, dass die Hyperbelgleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ erfüllt ist und skizzieren Sie k.

b) Bestimmen Sie für jeden Punkt $X(t)$ das Frenetzweibein, Tangente, Normale sowie die Krümmung.

c) Geben Sie Gleichungen für die Asymptoten (Grenzlage der Tangenten für $t \to \pm\infty$) an.

2. Aufgabe (10 Punkte)
Die ebene Kurve $k : \vec{x}(s)\,,\; s \in [0, L]$ sei in natürlicher Darstellung gegeben. Auf jeder Tangenten von k wird vom Berührpunkt aus eine Strecke mit der festen Länge $c > 0$ abgetragen. Damit entsteht eine auf den gleichen Parameter bezogene Kurve $k_c : \vec{y}(s) = \vec{x}(s) + c \cdot \vec{t}(s)\,,\; s \in [0, L]$.

a) Bestimmen Sie die Bogenlänge s_c von k_c.

b) Zeigen Sie: Ist $M(s)$ der Krümmungsmittelpunkt von k im Punkt $X(s)$, so ist die Gerade $M(s)Y(s)$ Normale von k_c im Punkt $Y(s)$.

3. Aufgabe (10 Punkte)
Bestimmen Sie die ebene Kurve k mit der natürlichen Gleichung $\kappa(s) = \frac{1}{1+s^2}$ und den Anfangswerten $\tilde{s} = 0 = \alpha(0)$, $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Aufgabe (10 Punkte)
In der Ebene seien eine **Traktrix** t und eine **Kettenlinie** k wie folgt definiert:

$$t \,:\, \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t - \tanh t \\ \dfrac{1}{\cosh t} \end{pmatrix}, \; t \in (0, \infty) \quad \text{und} \quad k \,:\, \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh t \end{pmatrix}, \; t \in (0, \infty)\,.$$

a) Skizzieren Sie die beiden Kurven.

b) Zeigen Sie, dass für die Traktrix der Abstand eines Kurvenpunktes $X(t)$ zum Schnittpunkt der zugehörigen Tangente mit der x_1-Achse konstant ist. Berechnen Sie diese Konstante.

c) Zeigen Sie, dass die Evolute der Traktrix t die Kettenlinie k ist.

d) Zeigen Sie, dass die Evolvente der Kettenlinie k zum Refenrenzpunkt $X(0)$ die Traktrix t ist.

ABGABE am Mittwoch, den 14. 5. 2008 vor den Übungen.