Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. K. Spitzmüller

4. Übungsblatt zur Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie (SS 2008)

1. Aufgabe (10 Punkte)

Gegeben sei die Raumkurve

$$k : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1+\cos t \\ \sin t \\ \cosh t \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}.$$

a) Berechnen Sie die vom Punkt $X(0)$ aus gemessene Bogenlänge s der Kurve.

b) Geben Sie die natürliche Darstellung von k an.

c) Bestimmen Sie den Winkel, den die Schmiegebene der Kurve in einem allgemeinen Kurvenpunkt mit der x_1x_2-Ebene bildet. In welchem Kurvenpunkt hat der Winkel den Wert $45°$?

2. Aufgabe (10 Punkte)

Die Kurve $k : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^4}{4} \\ \frac{t^3}{3} \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$ ist gegeben.

a) Ermitteln Sie diejenigen regulären Punkte auf k, in denen die Kurventangente parallel zur Ebene mit der Hesseform $y_1 + 3y_2 + 2y_3 = 0$ ist.

b) Berechnen Sie im Punkt $X(1)$ der Kurve die Vektoren $\vec{t}$, $\vec{h}$ und $\vec{b}$ des begleitenden Dreibeins.

3. Aufgabe (10 Punkte)

Gegeben sei die Raumkurve

$$k : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \\ e^t \end{pmatrix}, \; t \in [0, 2\pi].$$

a) Zeigen Sie, dass die Ortsvektoren von k mit der x_3-Achse konstanten Winkel einschließen und k deshalb auf einem Kegel liegt. Berechnen Sie diesen Winkel - den halben <u>Öffnungswinkel</u> des Kegels.

b) Berechnen Sie das sphärische Tangentenbild, das sphärische Hauptnormalenbild und das sphärische Binormalenbild dieser Kurve. Welche bekannten Kurven ergeben sich jeweils? Begründung!

c) Geben Sie die natürlichen Gleichungen von k an.

4. Aufgabe (10 Punkte)
Die Kurve

$$k\,:\,\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} r\cosh t\\ r\sinh t\\ rt\end{pmatrix},\ t\in(0,\infty)\ (r>0\text{ konstant})$$

heißt hyperbolische Schraublinie.

a) Bestimmen Sie die vom Punkt $X(0)$ aus gemessene Bogenlängenfunktion, die Krümmung, die Torsion und die natürlichen Gleichungen von k.

b) Zeigen Sie, dass auch

$$\tilde{k}\,:\,\vec{y}(t)=\begin{pmatrix} Rt\\ \sqrt{2}R\ln t\\ \frac{R}{t}\end{pmatrix},\ t\in(0,\infty)\ (R>0\text{ konstant})$$

eine hyperbolische Schraublinie ist. Wie ist der Parameter R zu wählen, damit $\tilde{k}$ durch eine geeignete Bewegung auf k abgebildet werden kann?

ABGABE am Mittwoch, den 21. 5. 2008 vor den Übungen.