

**5. Übungsblatt zur Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie (SS 2008)**

**1. Aufgabe** (10 Punkte) (frühere Klausuraufgabe)

a) Gegeben sei die ebene Kurve

$$c : \vec{x}(t) = (1 + 2 \cos t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

- i) Zeigen Sie, dass  $c$  regulär ist.
- ii) Bestimmen Sie Schnittpunkte von  $c$  mit den Achsen, die Punkte von  $c$  mit zur  $y$ -Achse parallelen Tangenten, und skizzieren Sie  $c$ .

b) Berechnen Sie für die Raumkurve

$$k : \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

die vom Punkt  $Y(0)$  aus gemessene Bogenlängenfunktion und die natürlichen Gleichungen von  $k$ .

**2. Aufgabe** (10 Punkte)

Geben Sie für die folgenden mit Konstanten  $a, b, c (\neq 0)$  implizit gegebenen Flächen jeweils eine Parameterdarstellung an. Unter welchen Namen sind diese Flächen in der Literatur bekannt?

a)

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1, \quad x_1 > 0$$

b)

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - x_3 = 0$$

a)

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - x_3 = 0$$

**3. Aufgabe** (10 Punkte)

Gegeben sei die als **Möbiusband** bekannte Regelfläche

$$\mathcal{F} : \vec{x}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} \cos u^1 \\ \sin u^1 \\ 0 \end{pmatrix} + u^2 \begin{pmatrix} \sin \frac{u^1}{2} \cdot \cos u^1 \\ \sin \frac{u^1}{2} \cdot \sin u^1 \\ \cos \frac{u^1}{2} \end{pmatrix}, \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

a) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{F}$  eine reguläre Fläche ist und skizzieren Sie  $\mathcal{F}$ .

b) Berechnen Sie die Normalenvektoren  $\vec{n}(u^1, u^2)$  von  $\mathcal{F}$ .

c) Zeigen Sie, dass für alle  $u^1 \in \mathbb{R}$  gilt:

(i)  $X(u^1 + 2\pi, 0) = X(u^1, 0)$

(ii)  $\vec{n}(u^1 + 2\pi, 0) = -\vec{n}(u^1, 0)$

**4. Aufgabe** (10 Punkte)

Berechnen Sie die Fundamentalgrößen erster Art und die Oberfläche des Rotationsellipsoids

$$\mathcal{F} : \vec{x}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} a \cos u^2 \cos u^1 \\ a \cos u^2 \sin u^1 \\ b \sin u^2 \end{pmatrix}, \quad 0 < b < a, \quad (u^1, u^2) \in [0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

**ABGABE** am Mittwoch, den 4. 6. 2008 vor den Übungen.