Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. K. Spitzmüller

6. Übungsblatt zur Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie (SS 2008)

1. Aufgabe (10 Punkte)
Gegeben sei die Fläche

$$\mathcal{F} : \vec{x}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} u^1 - u^2 \\ u^1 + u^2 \\ (u^1)^2 - (u^2)^2 \end{pmatrix}, \ (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine reguläre Fläche ist und skizzieren Sie sie.

b) Weisen Sie nach, dass die Parameterlinien von $\mathcal{F}$ ebene Kurven sind, und bestimmen Sie jeweils deren Krümmung. Gibt es auf ihnen Punkte extremaler Krümmung?

2. Aufgabe (10 Punkte)
Bestimmen Sie für die folgenden Flächen alle singulären Punkten und geben Sie für die regulären Punkte die Fundamentalgrößen erster Art an.

a) Die Ebene in Polarkoordinaten:

$$\mathcal{F} : \vec{x}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} u^2 \cos u^1 \\ u^2 \sin u^1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ (u^1, u^2) \in [0, 2\pi) \times [0, \infty).$$

b) Der verallgemeinerte Kegel mit der regulären Leitkurve l in der Ebene $x_3 = 1$.

$$l : \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin 2t \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi); \quad \mathcal{F} : \vec{x}(u^1, u^2) = u^2\, \vec{y}(u^1), \ (u^1, u^2) \in [0, 2\pi) \times \mathbb{R}.$$

c) Die Tangentenfläche einer Schraublinie k

$$k : \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}; \quad \mathcal{F} : \vec{x}(u^1, u^2) = \vec{y}(u^1) + u^2 \dot{\vec{y}}(u^1), \ (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2.$$

3. Aufgabe (10 Punkte)
Als Schnitt einer Kugel $\mathcal{K}$ und eines Zylinders $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{K} : \vec{\boldsymbol{x}}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} 2\cos u^2 \cos u^1 \\ 2\cos u^2 \sin u^1 \\ 2\sin u^2 \end{pmatrix}, (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{Z} : \vec{\boldsymbol{x}}(v^1, v^2) = \begin{pmatrix} 1 + \cos v^1 \\ \sin v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} (v^1, v^2) \in \mathbb{R}^2$$

ist eine Flächenkurve k auf $\mathcal{K}$ gegeben (Viviani-Fenster).

a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von k und zeigen Sie, dass k geschlossen ist und einen Doppelpunkt besitzt.

b) Berechnen Sie den Schnittwinkel von k mit den Breitenkreisen der Kugel $\mathcal{K}$. Unter welchem Winkel schneiden sich die Tangenten im Doppelpunkt?

c) Geben Sie an, welche ebenen Kurven sich bei Orthognalprojektion von k in die Koordinatenebenen ergeben.

4. Aufgabe (10 Punkte)
Gegeben sei die Regelfläche mit der Parameterdarstellung

$$\mathcal{F} : \vec{\boldsymbol{x}}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} u^1 + u^2 \\ -u^2 \sin u^1 \\ u^2 \cos u^1 \end{pmatrix}, \ (u^1, u^2) \in [0, 2\pi) \times \mathbb{R}.$$

a) Auf $\mathcal{F}$ sind durch $u^1 = u^2$ eine Flächenkurve k_1 und durch $u^2 = 1 - u^1$ eine zweite Flächenkurve k_2 gegeben. Berechnen Sie den Schnittpunkt und den Cosinus des Schnittwinkels der beiden Flächenkurven k_1 und k_2.

b) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien der u^2-Linien von $\mathcal{F}$.

ABGABE am Mittwoch, den 11. 6. 2008 vor den Übungen.