Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. K. Spitzmüller

7. Übungsblatt zur Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie (SS 2008)

1. Aufgabe (10 Punkte) (Teil einer ehemaligen Klausuraufgabe)
Gegeben sei die Fläche

$$\mathcal{F}: \vec{\boldsymbol{x}}(u^1,u^2) = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \ln\frac{u^1}{u^2} \end{pmatrix}, \ (u^1,u^2) \in (0,\infty)^2 \qquad .$$

a) Berechnen Sie die Fundamentalrößen erster Art von $\mathcal{F}$ und zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ regulär ist.

b) Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien der u^2-Linien von $\mathcal{F}$.

c) Berechnen Sie die Fundamentalgrößen zweiter Art und zeigen Sie, dass auf $\mathcal{F}$ stets $\det(h_{ij}) < 0$ gilt.

2. Aufgabe (10 Punkte)
Gegeben sei die Kugel durch die folgende Parameterdarstellung:

$$\mathcal{K}: \vec{\boldsymbol{x}}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} r\cos u^2 \cos u^1 \\ r\cos u^2 \sin u^1 \\ r\sin u^2 \end{pmatrix}, (u^1, u^2) \in [0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

Nach Vorlesung sind die α-Trajektorien der u^1-Linien (Kugelloxodrome) gegeben durch

$$u^1(u^2) = \tilde{u}^1 \pm \cot\alpha \ln(\tan(\frac{u^2}{2} + \frac{\pi}{4}))$$

a) Berechnen Sie für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ die Gesamtlänge der Loxodrome.

b) Bestimmen Sie die Länge der Loxodrome durch den Punkt $X(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$ und $X(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$.

c) Vergleichen Sie die in c) bestimmte Länge mit der Länge des Großkreisbogens zwischen diesen Punkten. Wie groß ist der Unterschied für ein Kugelmodell der Erde mit mittleren Radius 6371 km?

3. Aufgabe (10 Punkte)

a) Es sei $\mathcal{F}: \vec{x}(u^1, u^2)$, $(u^1, u^2) \in G$ eine reguläre Fläche und $k_{\mathcal{F}}$ eine reguläre Flächenkurve. Zeigen Sie:
$k_{\mathcal{F}}$ ist genau dann Winkelhalbierende der Parameterlinien, wenn sie die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$g_{11}(\dot{u}^1)^2 - g_{22}(\dot{u}^2)^2 = 0$$

b) Bestimmen Sie die Winkelhalbierenden der Parameterlinien der Wendelfläche

$$\mathcal{F}: \vec{x}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} u^2 \cos u^1 \\ u^2 \sin u^1 \\ hu^1 \end{pmatrix}, (u^1, u^2) \in [0, 2\pi) \times \mathbb{R}, h > 0 \text{ konstant.}$$

4. Aufgabe (10 Punkte) Gegeben sei die Fläche

$$\mathcal{F}: \vec{x}(u^1,u^2) = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ e^{u^1} + e^{u^2} \end{pmatrix}, (u^1,u^2) \in \mathbb{R}^2.$$

Die durch $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ gegebene Ebene schneidet $\mathcal{F}$ in einer Kurve k, die $P = X(0,0)$ enthält. Berechnen Sie in P die Tangente an k, die Normalkrümmung und die Krümmung.

ABGABE am Mittwoch, den 18. 6. 2008 vor den Übungen.