Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Rafaela Dietrich

Geometrische Gruppentheorie I (SS 2013)
Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (Hyperbolischer Abstand)

Zeigen Sie:

(a) Für $z, w \in \mathbb{H}, z \neq w$, gibt es ein eindeutig bestimmtes $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ mit $\gamma(z) = i$ und $\gamma(w) = ir$ für ein $r > 1$.

(b) Der hyperbolische Abstand zwischen zwei Punkten $z, w \in \mathbb{H}$ ist gegeben durch

$$sinh(\frac{1}{2} \cdot d_{\mathrm{hyp}}(z,w)) = \frac{|z-w|}{2 \cdot (\mathrm{Im}(z) \cdot \mathrm{Im}(w))^{1/2}}.$$

Aufgabe 2 (Kreise)

(a) Zeigen Sie: Hyperbolische Kreise sind euklidische Kreise.
Hinweis: Verschieben Sie den hyperbolischen Kreismittelpunkt mittels einer geeigneten Isometrie und benützen Sie obige Abstandsformel.

(b) Wie sieht die Bahn eines beliebigen Punktes in $\mathbb{H}$ unter Möbiustransformationen gegeben durch Elemente von $\mathrm{SO}(2)$ aus?

Aufgabe 3 (Die Isometriegruppe von $\mathbb{H}$)

Bestimmen Sie die volle Isometriegruppe von $(\mathbb{H}^2, d_{\mathrm{hyp}})$. Folgende Schritte können helfen:

(a) Es gilt $\sigma\colon z \mapsto -\bar{z} \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H})$, aber σ ist keine Möbiustransformation.

(b) Für jedes $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H})$ gibt es eine Möbiustransformation T, sodass gilt:

$$(T \circ \phi)_{|i \cdot \mathbb{R}_{>0}} = \mathrm{id}_{i \cdot \mathbb{R}_{>0}}.$$

(c) In diesem Fall gilt $T \circ \phi \in \{\sigma, \mathrm{id}\}$.

Aufgabe 4

Für δ_1, $\delta_2 > 0$ sei (X_1, d_1) ein δ_1-hyperbolischer Raum und (X_2, d_2) ein δ_2-hyperbolischer Raum. Für $w_1 \in X_1$, $w_2 \in X_2$ sei Y die Verklebung von X_1 und X_2, die w_1 und w_2 miteinander identifiziert. Auf Y definieren wir eine Metrik d vermöge

$$d(x,y) := \begin{cases} d_i(x,y), & \text{falls } x, y \in X_i \text{ für } i = 1,2 \\ d_i(x,w_i) + d_j(w_j,y), & \text{falls } x \in X_i, y \in X_j \text{ und } i \neq j \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass Y wieder ein δ-hyperbolischer Raum (für ein $\delta > 0$) ist.