Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Rafaela Dietrich

Geometrische Gruppentheorie I (SS 2013)
Übungsblatt 11

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass das freie Produkt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $m,n \in \mathbb{N}$, δ-hyperbolisch ist und bestimmen Sie ein geeignetes δ.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ von $T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $S := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ erzeugt wird.

(b) Wir betrachten die Menge $T_0 := \{\cos\theta + i\sin\theta : \theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]\}$ als geometrische Realisierung des Baumes, der aus zwei Ecken und einer Kante besteht.
Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \cdot T_0 := \{\gamma(T_0) : \gamma \in \rho(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))\}$ ein Baum ist (bzw. dessen geometrische Realisierung). Dabei sei $\rho : \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Aut}\,\mathbb{H}$ die übliche Operation von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$ durch Möbiustransformationen.

Hinweis: Es sei $z \in T_0$: Zeigen Sie zunächst, dass aus $\gamma(T_0) \cap T_0 \neq \emptyset$ folgt, dass γ einen Randpunkt von T_0 fixiert. Dazu hilft es zu zeigen, dass für $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ gilt:

$$|(c^2 - d^2)\gamma(z) - (ac - bd)| = 1.$$

Dann zeigen Sie, dass $\mathrm{Re}(\gamma(z)) = 0 \Rightarrow z = i$.

(c) Zeigen Sie damit, dass die Untergruppe $\Gamma(2)$ von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, die von den Elementen $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugt wird, frei ist.

Aufgabe 3

Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 2, dass $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ eine hyperbolische Gruppe ist.

Aufgabe 4 (kein Trapping im $\mathbb{R}^2$)

Zeigen Sie:

(a) Die logarithmische Spirale

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\geq 0} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto t \cdot (\sin(\ln(1+t)), \cos(\ln(1+t))) \end{aligned}$$

ist ein quasi-geodätischer Strahl, das heißt eine quasi-isometrische Einbettung bezüglich den Standardmetriken auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$.

(b) Die Logarithmische Spirale hat von keinem geodätischen Strahl im $\mathbb{R}^2$ endlichen Abstand.