Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Rafaela Dietrich

Geometrische Gruppentheorie I (SS 2013)
Übungsblatt 12

Aufgabe 1

Es seien G und H endlich erzeugte Gruppen. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) G ist endlich und H ist hyperbolisch. $\Longrightarrow G \times H$ ist hyperbolisch.

(b) $G \times H$ ist nicht hyperbolisch. $\Longrightarrow G$ oder H ist nicht hyperbolisch.

Aufgabe 2

(a) Welche Gruppe beschreibt $\langle a, b | aba^{-1} = b^2, bab^{-1} = a^2 \rangle$?

Gegeben sei $G = \langle x, y \mid r_1 := x^2, r_2 := y^3, r_3 := xy^{-1}xy^{-1} \rangle$.

(b) Welche Gruppe ist das?

(c) Ist das eine Dehn-Präsentation? Falls ja, wieso? Falls nein, gibt es eine Dehn-Präsentation dieser Gruppe?

(d) Finden Sie für Ihr Lieblingswort $w \in F$ mit $\pi(w) = 1_G$ (vielleicht nicht gerade das leere Wort!) zwei verschiedene Zerlegungen der Form $\Pi_{i=1}^k w_i r_{j_i}^{\pm 1} w_i^{-1}$ mit $w_i \in F$ und $j_i \in \{1, 2, 3\}$. (Dabei sei wie üblich F frei von $\{x, y\}$ erzeugt und $\pi : F \longrightarrow G$ der zugehörige surjektive Homomorphismus.)

Aufgabe 3

Es seien $\langle X | R \rangle$ und $\langle X' | R' \rangle$ zwei endliche Präsentationen der selben Gruppe G.
Zeigen Sie: Ist das Wortproblem für $\langle X | R \rangle$ entscheidbar, so auch für $\langle X' | R' \rangle$.

Aufgabe 4

(a) Es sei G eine Gruppe, die eine Präsentation mit n Erzeugern und m Relationen besitzt, und T ein weiteres endliches Erzeugendensystem von G mit l Elementen. Zeigen Sie, dass G dann eine Präsentation mit Erzeugendemsystem T und $k \leq m + l$ Relationen besitzt.

(b) Zeigen Sie: Besitzt eine Gruppe G ein endliches Erzeugendensystem S, zu dem es keine endliche Menge an Relationen R gibt, sodass $G = \langle S | R \rangle$, dann ist G durch kein Erzeugendensystem endlich präsentierbar.