

Geometrische Gruppentheorie I (SS 2013)

Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Zeigen Sie: Der Petersen-Graph ist nicht Cayleygraph einer endlich erzeugten Gruppe.

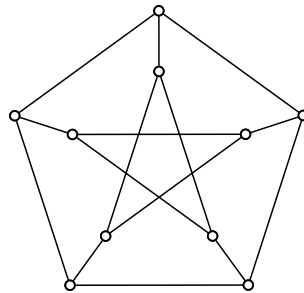


Abbildung 1: Der Petersen-Graph

Aufgabe 2

- (a) Die sogenannte *Quaternionengruppe* Q ist die Untergruppe von $GL(2, \mathbb{C})$, die von den beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Geben Sie einen Cayleygraphen für Q an.

- (b) Finden Sie zwei Gruppen G_1 und G_2 mit Cayleygraphen Γ_1 und Γ_2 so, dass Γ_1 und Γ_2 als Graphen gleich sind, aber G_1 nicht isomorph zu G_2 ist.

Aufgabe 3

Zeigen Sie:

- (a) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist nicht frei.
(b) \mathbb{Z}^2 ist nicht frei.

Aufgabe 4 (Rang einer freien Gruppe)

Es sei F eine freie Gruppe, $S \subset F$ ein freies Erzeugendensystem von F und S' ein beliebiges Erzeugendensystem. Zeigen Sie:

- (a) $|S'| \geq |S|$.
(b) Alle freien Erzeugendensysteme haben die gleiche Kardinalität.