Karlsruher Institut für Technologie

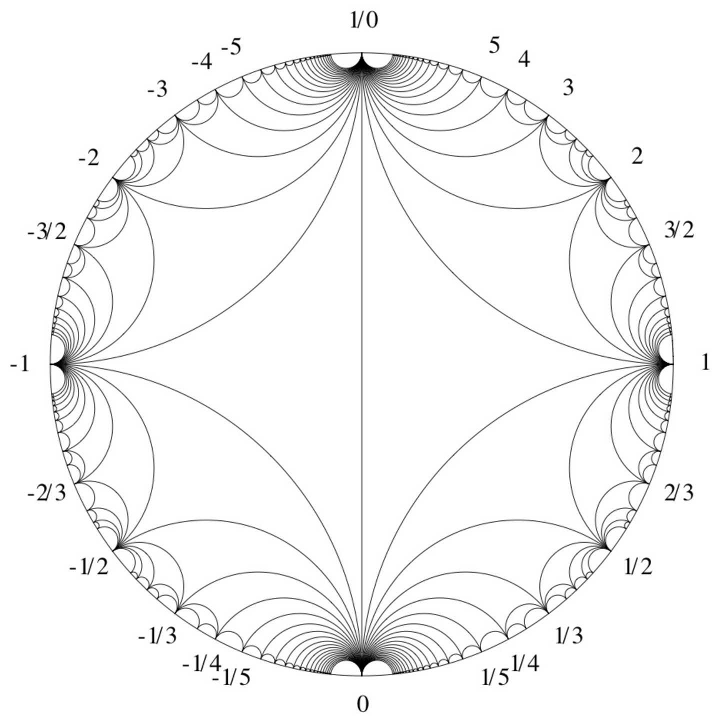
Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Rafaela Dietrich

Geometrische Gruppentheorie I (SS 2013)
Übungsblatt 4

Aufgabe 1

Der Farey-Graph Γ ist folgendermaßen definiert:

- Die Menge der Ecken sei $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ (dabei sei ∞ mit $\frac{1}{0}$ identifiziert).
- Die Ecken $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ seien genau dann durch eine Kante verbunden, wenn $|ad - bc| = 1$.



Für $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sei $h_A : \mathbb{Q} \cup \{\infty\} \to \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ gegeben durch

$$\frac{m}{n} \mapsto \frac{p}{q} \text{ mit } \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass dies eine Aktion von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf dem Farey-Graphen durch Graphenautomorphismen definiert.

(b) Wie viele Bahnen von Ecken gibt es?

(c) Wie viele Bahnen von Kanten gibt es?

(d) Berechnen Sie den Stabilisator von $\frac{1}{0}$.

Aufgabe 2

Es sei G eine Gruppe und S ein Erzeugendensystem von G.
Weiter sei $\Gamma = \Gamma(G,S) = (V,E)$ der zugehörige Cayleygraph und $\rho : G \to \mathrm{Aut}(\Gamma)$ die Aktion von G auf Γ durch Linksmultiplikation, sowie $f_g := \rho(g)$.
Für eine Ecke v des Cayleygraphen sei $\mathrm{Stab}(v) := \{h \in \mathrm{Aut}(\Gamma) \mid h(v) = v\}$ die Stabilisatorgruppe von v.

Zeigen Sie:
Jedes Element h in $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ lässt sich eindeutig schreiben als $h = f_g \circ h_1$ mit $h_1 \in \mathrm{Stab}(id)$ und $g \in G$.

Aufgabe 3

(a) Es sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert, und G_x der Stabilisator eines $x \in X$ bezüglich dieser Gruppenoperation. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\alpha_x : G/G_x \longrightarrow G \cdot x,$$

$$g \cdot G_x \mapsto g \cdot x$$

wohldefiniert und bijektiv ist.

Zeigen Sie außerdem:

(b) Operiert eine Gruppe der Ordnung 55 auf einer Menge von 39 Elementen, so gibt es mindestens einen Fixpunkt.

(c) Operiert eine Gruppe der Ordnung 55 auf einer Menge von 18 Elementen, so gibt es mindestens zwei Fixpunkte.

(d) Ist k kleiner als der kleinste Primteiler von n und operiert eine Gruppe der Ordnung n auf einer Menge von k Elementen, so ist die Operation trivial.