Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Rafaela Dietrich

Geometrische Gruppentheorie I (SS 2013)
Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Zeigen Sie: Es sei F eine freie Gruppe von Rang $n \geq 2$. Dann existiert für alle $m \in \mathbb{N}$ eine Untergruppe von F, die frei ist von Rang $r \geq m$.

Aufgabe 2

Auf dem Cayleygraphen $Cay(F(\{a,b\}),\{a,b\}) =: \Gamma$ operiert $\mathbb{Z}$ durch Linkstranslation mit Potenzen von a. Das heißt, eine Gruppenoperation ist gegeben durch

$$\Phi : \mathbb{Z} \longrightarrow Aut(\Gamma),\, z \mapsto \varphi(z)$$

$$\text{mit } \varphi(z)(v) := a^z \cdot v, \text{ für } v \in V(\Gamma) = F(\{a,b\})$$

Skizzieren Sie einen Fundamentalbaum für diese Gruppenoperation.

Aufgabe 3

Es sei T ein Baum. Ein Automorphismus φ von T heißt *hyperbolisch*, falls er auf einem zu $Cay(\mathbb{Z},\{1\})$ isomorphen Teilbaum von T eine Operation durch nichttriviale Translationen induziert.
Dieser zu $Cay(\mathbb{Z},\{1\})$ isomorphe Teilbaum C_φ heißt *Achse* von φ.

Zeigen Sie: Sind φ und ψ zwei hyperbolische Automorphismen von T mit disjunkten Achsen, dann ist $\langle \varphi, \psi \rangle$ freie Untergruppe von $Aut(T)$.

(*Hinweis:* Ping-Pong!)

Aufgabe 4

(a) Finden Sie eine Klasse $\mathscr{C}$ von Graphen mit der folgenden Eigenschaft: Eine Gruppe ist genau dann endlich zyklisch (das heißt, von einem Element endlicher Ordnung erzeugt), wenn sie auf einem Graphen aus $\mathscr{C}$ frei operiert.

(b) Gibt es eine solche Klasse von Graphen auch für die Gruppen $\{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 0}\}$?