Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Rafaela Dietrich

Geometrische Gruppentheorie I (SS 2013)
Übungsblatt 6

Aufgabe 1

Es seien (X,d_X), (Y,d_Y), (Z,d_Z) metrische Räume.

(a) Zeigen Sie: Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Quasi-Isometrien, dann ist auch $g \circ f$ eine Quasi-Isometrie.

(b) Für zwei Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : X \to Y$ gelte $f \sim g$ genau dann, wenn f und g endlichen Abstand haben. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation definiert..

(c) Sei $QI(X) := QI(X,d_X)$ die Menge der Äquivalenzklassen (bezüglich $\sim$) von Quasi-Isometrien $X \to X$. Zeigen Sie, dass $QI(X)$ mit der durch die Hintereinanderausführung induzierten Verknüpfung eine Gruppe wird.

(d) Zeigen Sie, dass eine Quasi-Isometrie $h : X \to Y$ einen Gruppenisomorphismus $QI(X) \to QI(Y)$ induziert.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass $QI(\mathbb{Z}, |\cdot|)$ überabzählbar ist.

Hinweis: Finden Sie einen injektiven Homomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to QI(\mathbb{Z})$.

Aufgabe 3

(a) Es seien $n,m \in \mathbb{N}, n \neq m$. Welche der folgenden jeweils mit der euklidischen Metrik versehenen metrischen Räume sind quasi-isometrisch zu einander?

$$\mathbb{Z}^n, \qquad \mathbb{Z}^m, \qquad \mathbb{R}^n, \qquad \mathbb{R}^m$$

(b) Sind folgende Gruppen für $n \geq 2$ quasi-isometrisch zueinander?

(i) $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}^n$

(ii) $\mathbb{Z}$ und F_n