Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Rafaela Dietrich

Geometrische Gruppentheorie I (SS 2013)

Übungsblatt 7

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie, dass bijektive Quasi-Isometrien zwischen endlich erzeugten Gruppen Bilipschitz-Äquivalenzen sind.

(b) Gilt das auch für den allgemeinen Fall? Das heißt, ist jede bijektive Quasi-Isometrie zwischen allgemeinen metrischen Räumen eine Bilipschitz-Äquivalenz?

Aufgabe 2

Benennen Sie für jede der folgenden Gruppenaktionen ein Voraussetzung des Schwarz-Milnor Lemmas, die erfüllt ist, und eine, die nicht erfüllt ist.

(a) $SL_2(\mathbb{Z})$ operiert auf $\mathbb{R}^2$ durch Matrixmultiplikation.

(b) $\mathbb{Z}$ operiert auf $X := \{(r^3, s) | r, s \in \mathbb{Z}\}$ (mit der durch die Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$ induzierten Metrik) durch

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times X &\longrightarrow X \\ (n, (r^3, s)) &\mapsto (r^3, s+n). \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Es sei X ein eigentlicher metrischer Raum und $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Isom}(X)$ eine Gruppenaktion. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Die Aktion von ρ ist eigentlich.

(ii) Für alle $x \in X$ ist die Bahn $G \cdot x := \{g \cdot x | g \in G\}$ von x lokal endlich. Das heißt, für alle kompakten Mengen $K \subseteq X$ gilt $|\{g \in G | g \cdot x \in K\}| < \infty$.

(iii) Jedes $x \in X$ hat eine Umgebung V, so dass $(g \cdot V \cap V \neq \emptyset \Rightarrow g \cdot x = x)$ und $\forall x \in X : |Stab(x)| < \infty$.