Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Rafaela Dietrich

Geometrische Gruppentheorie I (SS 2013)
Übungsblatt 8

Aufgabe 1

Für $G := \mathbb{Z}$ ist durch

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad (n,(x,y)) \longmapsto (n+x,y)$$

eine Linksoperation auf $\mathbb{R}^2$ gegeben. Weiter definiert

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad ((x,y),n) \longmapsto (x,y+n)$$

eine Rechtsoperation von $H := \mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2$ zusammen mit diesen Operationen eine mengentheoretische Kopplung von G und H ist.

Aufgabe 2

Es seien G und H Gruppen, für die es eine mengentheoretische Kopplung gibt. Zeigen Sie, dass G genau dann endlich erzeugt ist, wenn H endlich erzeugt ist.

Aufgabe 3

Zwei Gruppen G und H heißen *kommensurabel*, falls sie Untergruppen $G' \subseteq G$ und $H' \subseteq H$ von endlichem Index enthalten, die isomorph zueinander sind (also $[G : G'] < \infty$, $[H : H'] < \infty$ und $G' \simeq H'$). Zeigen Sie:

(a) Kommensurabilität ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Gruppen.

Es seien G und H kommensurabel und G endlich erzeugt. Dann gilt:

(b) H ist endlich erzeugt.

(c) G und H sind quasi-isometrisch.

(d) Alle freien Gruppen von Rang ≥ 2 sind kommensurabel und quasi-isometrisch.

Aufgabe 4