Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Rafaela Dietrich

Geometrische Gruppentheorie I (SS 2013)
Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (Der Cayleygraph der Heisenberggruppe)

Es sei H die Heisenberggruppe, das heißt

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathrm{SL}(3,\mathbb{Z}).$$

Die Heisenberggruppe wird erzeugt von $S := \{x,y,z\}$ mit

$$x := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad y := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \qquad z := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie den Cayleygraphen von H bezüglich S.

Hinweis: Dazu könnte das Ersetzen folgender Fragezeichen helfen:

- $(x^k y^l z^m)x = x^? y^? z^?$
- $(x^k y^l z^m)y = x^? y^? z^?$
- $(x^k y^l z^m)z = x^? y^? z^?$ mit $k,l,m \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2 (Die Wachstumsfunktion der Heisenberggruppe)

Es seien H und $S = \{x,y,z\}$ wie in Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(a) $d_S(e, x^k y^l z^m) \leq |k| + |l| + 6\sqrt{|m|}$ für alle $k,l,m \in \mathbb{Z}$.

(b) $d_S(e, x^k y^l z^m) \leq r \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |k| + |l| \leq r \\ |m| \leq r^2 \end{cases}$

(c) Die Wachstumsfunktion $\beta_{H,S}$ der Heisenberggruppe ist zu einem Polynom von Grad 4 äquivalent.

Aufgabe 3

Zeigen Sie für $a, \tilde{a} \in \mathbb{R}_{>1}$, $a' \in \mathbb{R}_{>0}$

(a) $(x \mapsto a^x) \sim (x \mapsto \tilde{a}^x)$,

(b) $(x \mapsto a^x) \succ (x \mapsto x^{a'})$,

(c) $(x \mapsto a^x) \not\prec (x \mapsto x^{a'})$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4

Für zwei Gruppen Q und N mit einer Gruppenoperation $\varphi : Q \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ bildet das Kartesische Produkt zusammen mit der Verknüpfung

$$(N \times Q) \times (N \times Q) \longrightarrow (N \times Q)$$

$$((n_1, q_1), (n_2, q_2)) \longmapsto (n_1 \cdot \varphi(q_1)(n_2), q_1 \cdot q_2)$$

eine Gruppe. Diese Gruppe heißt *semidirektes Produkt von* Q *mit* N *bezüglich* φ und wird mit $N \rtimes_\varphi Q$ notiert.

Nun sei $\quad \varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^2), \quad z \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^z \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad$ gegeben.

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}^2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ exponentielles Wachstum hat.

Bemerkung: Das ist ein schönes Beispiel für eine auflösbare Gruppe, die nicht virtuell nilpotent ist...