

Einführung in die Geometrie und Topologie

Dr. Stefan Kühnlein

Institut für Algebra und Geometrie, Karlsruher Institut für Technologie
September 2010

Dieses Skriptum unterliegt dem Urheberrecht. Vervielfältigungen jeder Art, auch nur auszugsweise, sind nur mit Erlaubnis des Autors gestattet.

Inhaltsverzeichnis

1	Einstieg	7
1.1	Kontext	7
1.2	Beispiele - was macht die Topologie?	8
1.3	Mengen, Abbildungen, usw.	10
2	Metrische Räume	17
2.1	Grundlagen	17
2.2	Vollständigkeit	23
2.3	Stetige Abbildungen	27
3	Topologische Grundbegriffe	31
3.1	Topologische Räume und einige Konstruktionen	31
3.2	Wichtige topologische Eigenschaften	35
3.3	Stetigkeit	42
4	Mannigfaltigkeiten	53
4.1	Atlanten	53
4.2	Die Sätze von Urysohn und Tietze	58
4.3	Flächen	66
5	Homotopie	75
5.1	Die Umlaufzahl	75
5.2	Homotope Abbildungen	79
5.3	Fundamentalgruppen	84
5.4	Überlagerungen	101

4

INHALTSVERZEICHNIS

6 Index

119

Soviel vorweg:

Das Ziel diese Skripts ist es, einen ersten Einblick in Geometrie und Topologie zu geben, mit einem Schwerpunkt auf topologischen Überlegungen. An keiner Stelle wird versucht, Ergebnisse bis in die letzten Winkel und Spitzen zu treiben; wir erlauben uns auch bisweilen, nicht geringstmögliche Voraussetzungen in Aussagen zu machen, sondern hoffen, durch eine Beschränkung auf einfachere Situationen bisweilen den Inhalt der Sätze (von denen es ohnehin nicht so viele gibt) deutlich zu machen. Die Vorlesung ist nicht für Spezialisten gedacht – das verbietet sich schon angesichts des Dozenten, der ja auch selbst kein Spezialist ist. Hiermit sei seiner Hoffnung der Ausdruck verliehen, dass die subjektive Stoffauswahl nicht zu sehr zu Lasten der Allgemeinheit geht und ein Verständnis trotz allem zustande kommen kann.

Jedenfalls werden in dieser Vorlesung nicht alle erlaubten Implikationen zwischen allen möglichen Aussagen vorgeführt werden.

Ich habe auf eine umfangreiche Illustration verzichtet, zum einen weil dies in der Vorlesung passieren soll, zum anderen, weil es vielleicht auch für Leser eine instruktive Übung ist, sich selbst ein Bild von dem zu machen, wovon die Rede ist. Der begriffliche Apparat ist das präzise Werkzeug, die Bilder sind ja „nur“ ein Hilfsmittel, das uns helfen soll zu sehen, wo die Werkzeuge angesetzt werden können. Außerdem sind manche Bilder sehr irreführend, zumal wenn es um Sachverhalte geht, die sich definitiv nicht mehr in unserem Anschauungsraum abspielen können.

Das Skriptum entstand zur Hälfte im Rahmen einer Vorlesung namens Topologie im Wintersemester 2007/08. Die andere Hälfte habe ich für die Vorlesung „Einführung in die Geometrie und Topologie“ am KIT im Wintersemester 2010/11 neu geschrieben und beides gut vermischt.

Nun zum Inhalt selbst.

Kapitel 1

Einstieg

1.1 Kontext

Die Geometrie ist eine der ältesten Disziplinen der Mathematik und hat in den letzten 200 Jahren gravierende Neuentwicklungen durchlebt, die ihre Reichweite weit über das hinausheben, was aus der Schule als Geometrie bekannt sein sollte. Insbesondere die Entwicklung der projektiven Geometrie und die systematische Behandlung des Begriffs der Krümmung haben hier neue Welten eröffnet. Dabei sind immer metrische Aspekte von Bedeutung (was den Namen zur Hälfte erklärt).

Die Topologie ist eine mathematische Grundlagendisziplin, die sich verstärkt seit dem Ende des 19. Jahrhunderts eigenständig entwickelt hat. Vorher waren einige topologische Ideen im Zusammenhang mit geometrischen und analytischen Fragestellungen entstanden. Um Topologie handelt es sich zunächst immer dann, wenn geometrische Objekte deformiert werden und solche Eigenschaften der Objekte in den Vordergrund treten die sich dabei nicht ändern.

Topologisch ist eine Kugel dasselbe wie ein Würfel - geometrisch zwar völlig unterschiedlich, aber doch gibt es einige Gemeinsamkeiten. Es wäre vielleicht einmal interessant zu verfolgen, ob der Kubismus am Ende des 19. Jhdts. und die topologische Frage nach „simplicialen Zerlegungen“ geometrischer Objekte sich gegenseitig beeinflusst haben. . .

Der weiche Begriff der Nähe spielt in der Topologie eine gewisse Rolle, mehr als der präzisere Begriff des Abstands aus der Geometrie. Die topologischen Mechanismen, die so entwickelt wurden, wurden nach und nach von ihren geometrischen Eltern entfernt; dafür sind die Eltern ja da: sich überflüssig zu machen. Und so konnten topologische Ideen sich auch auf andere Bereiche der Mathematik ausdehnen und diese geometrisch durchdringen.

Auch außerhalb der Mathematik ist die Topologie längst keine Unbekannte mehr.

So gab es in der ersten Hälfte des 20. Jhdts. die topologische Psychologie von Kurt Lewin, die allerdings nur die Terminologie von der Topologie übernahm, und nicht etwa mithilfe topologischer Argumente neue Einsichten produzierte. Etwas anders sieht es natürlich mit den „richtigen“ Naturwissenschaften aus. In der Physik taucht die Topologie zum Beispiel in der Form von Modulräumen in der Stringtheorie auf, und in der Molekularchemie kann man zum Beispiel Chiralität als topologisches Phänomen verstehen.

1.2 Beispiele - was macht die Topologie?

Beispiel 1.2.1 Nullstellenfang mit dem Lasso

Es sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine nichtkonstante Polynomabbildung, d.h. $f(z) = \sum_{i=0}^d a_i z^i$ mit $d > 0$ und $a_d \neq 0$.

Dann hat f eine Nullstelle in \mathbb{C} . Das kann man zum Beispiel so plausibel machen:

Wenn $a_0 = 0$ gilt, dann ist $z = 0$ eine Nullstelle. Wenn $a_0 \neq 0$, dann brauchen wir ein Argument. Wir betrachten den Kreis vom Radius R um den Nullpunkt: $RS^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$. Aus der Gleichung

$$f(z) = a_d z^d \cdot \left(1 + \frac{a_{d-1}}{a_d z} + \cdots + \frac{a_0}{a_d z^d}\right)$$

folgt, dass das Bild von RS^1 unter f jedenfalls für großes R im Wesentlichen der d -fach durchlaufene Kreis vom Radius $|a_d|R^d$ ist. Im Inneren dieser Schlaufe liegen für großes R sowohl die 0 als auch a_0 . Wenn man nun den Radius kleiner macht, so wird diese Schlaufe für $R \searrow 0$ zu einer Schlaufe um a_0 zusammengezogen – das ist die Stetigkeit von f . Für kleines R liegt insbesondere 0 nicht im Inneren der Schlaufe. Das aber heißt, dass beim Prozess des Zusammenziehens die Schlaufe irgendwann mindestens einmal die 0 trifft. Dann hat man eine Nullstelle von f gefunden. Das lässt sich mit den Werkzeugen der Funktionentheorie (Stichwort Umlaufzahl) genauer fassen.

Einen anders gelagerten topologischen Beweis des Fundamentalsatzes werden wir in 3.3.14 andeuten.

In diesem Argument – das man streng durchziehen kann – wird ein topologisches Phänomen benutzt, um den Fundamentalsatz der Algebra zu beweisen. Das Zusammenziehen der Kurve durch Variation des Parameters R werden wir später allgemeiner als Spezialfall einer Homotopie verstehen.

Beispiel 1.2.2 Fahrradpanne

Es gibt keine stetige Bijektion von einem Torus T („Fahrradschlauch“) auf eine Kugeloberfläche S .

Denn: Auf dem Torus gibt es eine geschlossene Kurve γ , die ihn nicht in zwei Teile zerlegt. Ihr Bild unter einer stetigen Bijektion von T nach S würde dann S auch nicht in zwei Teile zerlegen, da das stetige Bild des Komplements $T \setminus \gamma$ gleich $S \setminus \text{Bild von } \gamma$ zusammenhängend sein müsste, aber das stimmt für keine geschlossene Kurve auf S .

Auch hier sieht man ein topologisches Prinzip am Werk. Es ist oft sehr schwer zu zeigen, dass es zwischen zwei topologischen Räumen (siehe später) keine stetige Bijektion gibt. Dass ich keine solche finde sagt ja noch nicht wirklich etwas aus. . .

In der linearen Algebra weiß man sehr genau, wann es zwischen zwei Vektorräumen einen Isomorphismus gibt, das hängt ja nur an der Dimension. Ähnlich versucht man in der Topologie, zu topologischen Räumen zugeordnete Strukturen zu finden, die nur vom Isomorphietyp abhängen, und deren Isomorphieklassen man besser versteht als die der topologischen Räume.

Beispiel 1.2.3 Eulers¹Polyederformel

Für die Anzahl E der Ecken, K der Kanten und F der Flächen eines (konvexen) Polyeders gilt die Beziehung $E - K + F = 2$.

Das kann man zum Beispiel einsehen, indem man das Polyeder zu einer Kugel aufbläst, auf der man dann einen Graphen aufgemalt hat (Ecken und Kanten des Polyeders), und dann für je zwei solche zusammenhängenden Graphen zeigt, dass sie eine gemeinsame Verfeinerung haben. Beim Verfeinern ändert sich aber $E - K + F$ nicht, und so muss man nur noch für ein Polyeder die alternierende Summe auswerten, zum Beispiel für das Tetraeder, bei dem $E = F = 4, K = 6$ gilt. Wir werden das später noch genauer sehen.

Beispiel 1.2.4 Reelle Divisionsalgebren

Eine reelle Divisionsalgebra ist ein \mathbb{R} -Vektorraum A mit einer bilinearen Multiplikation, für die es ein neutrales Element gibt und jedes $a \in A \setminus \{0\}$ invertierbar ist.

Beispiele hierfür sind $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ (Hamilton²-Quaternionen) und – wenn man die Assoziativität wirklich nicht haben will – \mathbb{O} (die Cayley³-Oktaven). Die Dimensionen dieser Vektorräume sind 1, 2, 4, 8. Tatsächlich ist es so, dass es keine weiteren endlichdimensionalen reellen Divisionsalgebren gibt. Dies hat letztlich einen topologischen Grund.

Zunächst überlegt man sich, dass die Struktur einer Divisionsalgebra auf \mathbb{R}^n auf der $n - 1$ -dimensionalen Sphäre eine Verknüpfung induziert, die fast eine Gruppenstruktur ist.

¹Leonhard Euler, 1707-1783

²William Hamilton, 1788-1856

³Arthur Cayley, 1821-1895

Dann kann man im wesentlichen topologisch zeigen, dass solch eine Struktur auf der Sphäre nur für $n \in \{1, 2, 4, 8\}$ existieren kann. Solch eine Gruppenstruktur stellt nämlich topologische Bedingungen, die für die anderen Sphären nicht erfüllt sind.

Eng damit zusammen hängt der

Beispiel 1.2.5 Satz vom Igel

Dieser Satz sagt, dass jeder stetig gekämmte Igel mindestens einen Glatzpunkt besitzt. Die Richtigkeit dieses Satzes gründet sich nicht darauf, dass es bisher noch niemanden gelungen ist, einen Igel zu kämmen. Sie hat handfeste mathematische Gründe, die in einer etwas präziseren Formulierung klarer werden:

Etwas weniger prosaisch besagt der Satz „eigentlich“, dass ein stetiges Vektorfeld auf der zweidimensionalen Sphäre mindestens eine Nullstelle besitzt.

Beispiel 1.2.6 Brouwers⁴ Fixpunktsatz

Jede stetige Abbildung des n -dimensionalen Einheitswürfels $W = [0, 1]^n$ in sich selbst hat einen Fixpunkt.

Für $n = 1$ ist das im Wesentlichen der Zwischenwertsatz. Ist $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ stetig, so ist auch $g(x) := f(x) - x$ eine stetige Abbildung von $[0, 1]$ nach \mathbb{R} , und es gilt $g(0) \geq 0, g(1) \leq 0$.

Also hat g auf jeden Fall eine Nullstelle x_0 , aber das heißt dann $f(x_0) = x_0$.

Für $n = 2$ werden wir ein Argument kennenlernen, der Fall $n \geq 3$ ist nicht so elementar zu behandeln.

1.3 Mengen, Abbildungen, usw.

Wir werden für eine Menge M mit $\mathcal{P}(M)$ immer die Potenzmenge bezeichnen:

$$\mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}.$$

Für eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ nennen wir das Urbild $f^{-1}(n)$ eines Elements $n \in f(M) \subseteq N$ auch eine *Faser* von f .

Eine Abbildung ist also injektiv, wenn alle Fasern einelementig sind.

Ist f surjektiv, so gibt es eine Abbildung $s : N \rightarrow M$ mit $f \circ s = \text{Id}_N$ – die identische Abbildung auf N . Jede solche Abbildung s heißt ein *Schnitt* zu f . Er wählt zu jedem $n \in N$ ein $s(n) \in f^{-1}(n)$ aus. Wenn man also M als

⁴Luitzen Egbertus Jan Brouwer, 1881-1966

Vereinigung der Fasern von f über den Blumentopf N malt, so erhält der Name Schnitt eine gewisse Berechtigung.

Eine *Partition* von M ist eine Zerlegung von M in disjunkte, nichtleere Mengen $M_i, i \in I$, wobei I eine Indexmenge ist:

$$M = \bigcup_{i \in I} M_i, \quad \forall i \neq j : M_i \cap M_j = \emptyset, M_i \neq \emptyset.$$

Hand in Hand mit solchen Partitionen gehen Äquivalenzrelationen auf M . Die Relation zur Partition $M_i, i \in I$ wird gegeben durch

$$m \sim \tilde{m} \iff \exists i \in I : m, \tilde{m} \in M_i.$$

Umgekehrt sind die Äquivalenzklassen zu einer Äquivalenzrelation \sim eine Partition von M . Die Menge der Äquivalenzklassen nennen wir auch den *Faktorraum* M/\sim :

$$M/\sim = \{M_i \mid i \in I\}.$$

Die Abbildung $\pi_\sim : M \rightarrow M/\sim, \pi_\sim(m) := [m]$ = Äquivalenzklasse von m heißt die *kanonische Projektion* von M auf M/\sim .

Ist \sim eine Äquivalenzrelation auf M und $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung, so dass jede Äquivalenzklasse von \sim in einer Faser von f enthalten ist (d.h. f ist konstant auf den Klassen), so wird durch

$$\tilde{f} : M/\sim \rightarrow N, \tilde{f}([m]) := f(m),$$

eine Abbildung definiert, für die $f = \tilde{f} \circ \pi_\sim$ gilt. Das ist die mengentheoretische Variante des Homomorphiesatzes.

Beispiel 1.3.1 Gruppenaktionen

Ein auch in Geometrie und Topologie wichtiges Beispiel, wie Äquivalenzrelationen bisweilen entstehen, ist das der *Operation* einer Gruppe G auf der Menge M .

Solch eine Gruppenaktion ist eine Abbildung

$$\bullet : G \times M \rightarrow M,$$

die die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} \forall m \in M : e_G \bullet m &= m \\ \forall g, h \in G, m \in M : g \bullet (h \bullet m) &= (gh) \bullet m. \end{aligned}$$

Hierbei ist e_G das neutrale Element von G und gh ist das Produkt von g und h in G .

Für jedes $g \in G$ ist die Abbildung

$$\rho_g : M \longrightarrow M, \rho_g(m) := g \bullet m,$$

eine Bijektion von M nach M , die Inverse ist $\rho_{g^{-1}}$, und

$$g \mapsto \rho_g$$

ist ein Gruppenhomomorphismus von G in die symmetrische Gruppe von M .

Die *Bahn* von $m \in M$ unter der Operation von G ist

$$G \bullet m := \{g \bullet m \mid g \in G\}.$$

Man kann leicht verifizieren, dass die Bahnen einer Gruppenoperation eine Partition von M bilden.

Die Menge aller Äquivalenzklassen, die hier ja gerade die Bahnen sind, heißt auch der *Bahnenraum* von G auf X und wird mit X/G notiert.

Pedantischer Weise sollte man hier eigentlich $G \backslash X$ schreiben, und in manchen Situationen werde ich dies auch tun.

Umgekehrt ist es so, dass jede Partition $(M_i)_{i \in I}$ von M von der natürlichen Aktion einer geeigneten Untergruppe G von $\text{Sym}(M)$ herkommt. Hierzu wähle man einfach

$$G := \{\sigma \in \text{Sym}(M) \mid \forall i \in I : \sigma(M_i) = M_i\}$$

und verifiziere was zu verifizieren ist.

Beispiel 1.3.2 projektive Räume

Es seien K ein Körper und n eine natürliche Zahl.

Auf $X := K^{n+1} \setminus \{0\}$ operiert die Gruppe K^\times durch die skalare Multiplikation

$$a \bullet v := a \cdot v.$$

Die Bahn von $v \in X$ unter dieser Operation ist $Kv \setminus \{0\}$. Da die 0 ohnehin zu jeder Geraden durch den Ursprung gehört, kann man den Bahnenraum X/K^\times mit der Menge aller Geraden durch den Ursprung identifizieren. Dieser Raum heißt der *n-dimensionale projektive Raum über K* , in Zeichen $\mathbb{P}^n(K)$.

Speziell für $n = 1$ gilt:

$$\mathbb{P}^1(K) = \left\{ \left[\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \right] \mid a \in K \right\} \cup \left\{ \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\}.$$

Oft identifiziert man den ersten großen Brocken hier mit K , den hinzukommenden Punkt nennt man suggestiver Weise ∞ .

Genauso haben wir für beliebiges n eine Zerlegung

$$\mathbb{P}^n(K) = \left\{ \left[\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \right] \mid v \in K^n \right\} \cup \left\{ \left[\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} \right] \mid w \in K^n, w \neq 0 \right\} \cong K^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(K),$$

wobei die Auswahl des *affinen Teils* K^n durch die Bedingung, dass die letzte Koordinate nicht null ist, relativ willkürlich ist.

Ein Punkt in $\mathbb{P}^n(K)$ wird gegeben durch ein Tupel (x_0, \dots, x_n) von Elementen aus K , die nicht alle 0 sind. Zwei solche Tupel sind äquivalent, wenn sie sich um einen gemeinsamen Faktor aus K unterscheiden. Diese Äquivalenzklasse – ein Punkt P im projektiven Raum – wird meistens mit $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ bezeichnet, und man spricht von homogenen Koordinaten des Punktes P .

Bemerkung 1.3.3 Das Parallelenaxiom

Seit der axiomatischen Grundlegung der ebenen Geometrie, die spätestens mit Euklid⁵ in die Gedankenwelt Einzug gehalten hat, trieb viele Geometer die Frage um, ob das Parallelenaxiom – also die Forderung, dass durch jeden Punkt P , der nicht auf einer gegebenen Geraden g liegt, genau eine zu g parallele Gerade läuft – sich aus den restlichen Axiomen herleiten lässt.

Da die Axiomatik aus heutiger Sicht nicht festschreiben kann, was die Punkte und Geraden der Ebene sind, sondern nur Beziehungen zwischen den Punkten und Geraden regelt, hat man hier noch große Freiheit.

In der ebenen projektiven Geometrie – also in $\mathbb{P}^2(K) = K^3 \setminus \{0\} / K^\times$ – ist nach Definition eine projektive Gerade die Menge aller Punkte $(x_0 : x_1 : x_2)$, wobei (x_0, x_1, x_2) alle Vektoren ungleich 0 eines zweidimensionalen Untervektorraums $U \subset K^3$ durchläuft.

Dann gilt wie in der euklidischen Ebene, dass es durch je zwei Punkte $P \neq Q$ genau eine projektive Gerade gibt und dass nicht alle Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Aber zwei Geraden schneiden sich immer, denn die zugehörigen Ebenen in K^3 schneiden sich wegen der Dimensionsformel für Untervektorräume.

Damit ist das Parallelenaxiom widerlegt.

Noch krasser – das werden wir später noch diskutieren – wird das in der hyperbolischen Geometrie, wo es durch jeden Punkt außerhalb einer Gerade g unendlich viele zu g parallele Geraden gibt.

Definition 1.3.4 Faserprodukte

Es seien A, B, S Mengen und $f_A : A \rightarrow S$, $f_B : B \rightarrow S$ zwei Abbildungen.

Weiter sei F eine Menge mit Abbildungen π_A, π_B von F nach A bzw. B , sodass $f_A \circ \pi_A = f_B \circ \pi_B$.

⁵Euklid, ca. 300 v. Chr.

F heißt ein *Faserprodukt* von A und B über S , wenn für jede Menge M und jedes Paar von Abbildungen g_A, g_B von M nach A bzw. B mit $f_A \circ g_A = f_B \circ g_B$ genau eine Abbildung $h : M \rightarrow F$ existiert, sodass

$$g_A = \pi_A \circ h, \quad g_B = \pi_B \circ h.$$

Insbesondere impliziert das, dass es zwischen zwei Faserprodukten von A und B über S genau einen sinnvollen Isomorphismus gibt. Denn nach Definition gibt es für ein zweites Faserprodukt $(\tilde{F}, \tilde{\pi}_A, \tilde{\pi}_B)$ genau eine Abbildung h von \tilde{F} nach F mit

$$\tilde{\pi}_A = \pi_A \circ h, \quad \tilde{\pi}_B = \pi_B \circ h$$

und auch genau eine Abbildung $\tilde{h} : F \rightarrow \tilde{F}$ mit

$$\pi_A = \tilde{\pi}_A \circ \tilde{h}, \quad \pi_B = \tilde{\pi}_B \circ \tilde{h}.$$

Dann ist aber $h \circ \tilde{h}$ eine Abbildung von F nach F mit

$$\pi_A = \pi_A \circ (h \circ \tilde{h}), \quad \pi_B = \pi_B \circ (h \circ \tilde{h}),$$

was wegen der Eindeutigkeit aus der Definition zwangsläufig

$$h \circ \tilde{h} = \text{Id}_F$$

nach sich zieht. Analog gilt auch

$$\tilde{h} \circ h = \text{Id}_{\tilde{F}}.$$

Schreibweise: Für das Faserprodukt schreibt man meistens $A \times_S B$, wobei in der Notation die Abbildungen f_A und f_B unterdrückt werden.

Ein Faserprodukt existiert immer. Wir können nämlich

$$F := \{(a, b) \in A \times B \mid f_A(a) = f_B(b)\}$$

wählen und für π_A, π_B die Projektion auf den ersten beziehungsweise zweiten Eintrag.

Die Abbildung h aus der Definition ist dann einfach $h(m) = (g_A(m), g_B(m))$.

Wir können F auch hinschreiben als

$$F = \bigcup_{s \in S} (f_A^{-1}(s) \times f_B^{-1}(s)),$$

also als Vereinigung der Produkte der Fasern von f_A und f_B über jeweils demselben Element von S . Das erklärt den Namen.

Beispiel 1.3.5 Spezialfälle

- a) Wenn S nur aus einem Element s besteht, dann sind f_A und f_B konstant, und damit $A \times_S B = A \times B$ das mengentheoretische Produkt.
- b) Wenn A, B Teilmengen von S sind und die Abbildungen f_A, f_B einfach die Inklusionen, dann gilt

$$A \times_S B = \{(a, b) \in A \times B \mid a = b\} = \{(s, s) \mid s \in A \cap B\} \cong A \cap B.$$

Kapitel 2

Metrische Räume

2.1 Grundlagen

Definition 2.1.1 Metrischer Raum

Ein *metrischer Raum* ist eine Menge X zusammen mit einer Abbildung

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
- $\forall x \in X : d(x, x) = 0$.
- $\forall x, y \in X : x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0$.
- $\forall x, y, z \in X : d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$. (Dreiecksungleichung)

Die Abbildung d heißt dabei die *Metrik*.

Penibler Weise sollte man einen metrischen Raum als Paar (X, d) schreiben. Meistens wird das nicht gemacht, aber Sie kennen diese Art der Schlamperei ja schon zur Genüge...

Beispiel 2.1.2 LA und Ana lassen grüßen

- a) Ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wird bekanntlich mit

$$d(v, w) := \sqrt{\langle v - w, v - w \rangle} = \|v - w\|$$

zu einem metrischen Raum.

b) Jede Menge X wird notfalls durch

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y, \\ 0, & \text{falls } x = y, \end{cases}$$

zu einem metrischen Raum. Diese Metrik heißt die *diskrete Metrik* auf X .

c) Es sei X eine Menge und $\mathcal{B}(X)$ der Vektorraum der beschränkten reellwertigen Funktionen auf X . Dann wird X vermöge

$$d(f, g) := \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in X\}$$

zu einem metrischen Raum.

Anstelle der Norm aus einem Skalarprodukt benutzt man hier also die sogenannte *Maximumsnorm*

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in X\},$$

um eine Metrik zu konstruieren. Diese kommt nicht von einem Skalarprodukt her, wenn X mindestens 2 Elemente hat.

Allgemeiner sei für eine Menge X und einen metrischen Raum (Y, δ) die Menge $\mathcal{B}(X, Y)$ definiert als die Menge aller beschränkten Abbildungen von X nach Y . Dabei heißt f beschränkt, wenn ein $R \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\forall x_1, x_2 \in X : \delta(f(x_1), f(x_2)) < R.$$

Dann wird $\mathcal{B}(X, Y)$ zu einem metrischen Raum vermöge

$$d(f, g) := \sup\{\delta(f(x), g(x)) \mid x \in X\}.$$

d) Auf den rationalen Zahlen lässt sich für eine Primzahl p auf folgende Art eine Metrik konstruieren:

Jede rationale Zahl $q \neq 0$ kann man schreiben als $p^{v_p(q)} \cdot \frac{a}{b}$, wobei $a, b \in \mathbb{Z}$ keine Vielfachen von p sind. Dadurch ist $v_p(q) \in \mathbb{Z}$ eindeutig bestimmt.

Wir setzen für zwei rationale Zahlen x, y

$$d_p(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ p^{-v_p(x-y)}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies ist die sogenannte *p-adische Metrik* auf \mathbb{Q} .

Beispiel 2.1.3 Graphen

Ein *ungerichteter Graph* G ist für diese Veranstaltung eine Vorgabe von Daten $G = (E, K, \tau)$, mit den folgenden genaueren Wünschen:

E ist eine Menge (die Ecken von G), K ist eine Menge (die Kanten) und τ eine Abbildung

$$\tau : K \rightarrow \mathcal{P}(E),$$

die jeder Kante $k \in K$ eine ein- oder zweielementige Menge von Ecken zuordnet, die *Endpunkte* von k .

Eine Kante mit einelementiger Eckenmenge $\tau(k)$ heißt eine Schleife.

Ein *Kantenzug der Länge* $a \in \mathbb{N}_0$ im Graphen (E, K, τ) von der Ecke e_0 zur Ecke e_a ist eine Folge

$$e_0, k_1, e_1, k_2, \dots, e_{a-1}, k_a, e_a,$$

wobei die e_i Ecken und die k_i Kanten sind und stets $\{e_{i-1}, e_i\} = \tau(k_i)$ gilt.

Der Graph heißt *zusammenhängend*, wenn es zwischen je zwei Ecken (mindestens) einen Kantenzug gibt. In diesem Fall wird E zu einem metrischen Raum, wenn wir

$$d(k, k') := \min\{a \in \mathbb{N}_0 \mid \exists \text{ Kantenzug der Länge } a \text{ von } k \text{ nach } k'\}$$

setzen.

Eigentlich will man auch die Kanten mit „einzeichnen“. Das kann man so machen: Wir wählen willkürlich für jede Kante k einen Anfang $\tau_0(k) \in \tau(k)$ und ein Ende $\tau_1(k) \in \tau(k)$, derart dass

$$\tau(k) = \{\tau_0(k), \tau_1(k)\}$$

und stellen uns vor, dass die Kante von $\tau_0(k)$ nach $\tau_1(k)$ läuft.

Weiter sei $\tilde{K} = [0, 1] \times K$, also quasi für jede Kante in K ein Einheitsintervall. Wir setzen

$$\tilde{G} := \tilde{K} / \sim,$$

wobei \sim die kleinste Äquivalenzrelation auf \tilde{K} ist, die für $t, t' \in \{0, 1\}$ und $k, k' \in K$ die Punkte (t, k) und (t', k') identifiziert, wenn $\tau_t(k) = \tau_{t'}(k')$ gilt.

Am besten malen Sie sich dazu ein endliches Beispiel selbst auf!

Wir fassen die Punkte aus E als Punkte in \tilde{G} auf, die jeweils den Äquivalenzklassen von Endpunkten von Kanten entsprechen.

Nun hat man auf jeder Kante $[0, 1] \times \{k\}$ eine Abstandsfunktion, die von der Metrik der reellen Zahlen herkommt, und damit kann man die Länge eines Kantenzugs zwischen zwei Punkten aus \tilde{G} messen und ihren Abstand wieder als die Länge eines kürzesten Verbindungsweges definieren. Für die Ecken selbst liefert das die oben genannte Metrik zurück.

Nun kommt ein wichtiger Begriff, der Ordnung in das Gewusel der metrischen Räume bringen will.

Definition 2.1.4 Isometrien

Es seien (X, d) und (Y, e) zwei metrische Räume. Eine *abstandserhaltende Abbildung* von X nach Y ist eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$, für die gilt:

$$\forall x_1, x_2 \in X : d(x_1, x_2) = e(f(x_1), f(x_2)).$$

Solche Abbildungen sind immer injektiv. Eine surjektive abstandserhaltende Abbildung heißt eine *Isometrie*.

Die Menge der Isometrien von X nach X ist eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\text{Sym}(X)$ aller Bijektionen von X nach X . Sie heißt die *Isometriegruppe* $\text{Iso}(X, d) = \text{Iso}(X)$ von X .

Beispiel 2.1.5 Isometrien der Ebene und der Sphäre

Die euklidische Standardebene \mathbb{R}^2 (mit Standardskalarprodukt) und die Einheitskugel $\mathbb{S}^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v^\top \cdot v = 1\}$ sind interessante metrische Räume, und wir lernen etwas über Isometrien, indem wir ihre Isometriegruppen untersuchen. Allerdings sollte man vorsichtig sein und die richtige Metrik von \mathbb{S}^2 benutzen, denn der auf der Kugeloberfläche gemessene Abstand ist ein anderer als die Länge der Verbindungsstrecke im dreidimensionalen Raum. Der Abstand zwischen v und $w \in \mathbb{S}^2$ ist der Winkel zwischen den von v und w aufgespannten Halbgeraden im Bogenmaß.

a) Jede Translation $\tau_a : x \mapsto x + a$ mit festem $a \in \mathbb{R}^2$ ist eine Isometrie von \mathbb{R}^2 . Das ist klar, denn der Abstand zweier Punkte ist die Länge des Differenzvektors, und der Differenzvektor von x und y ist derselbe wie der von $x + a$ und $y + a$.

Wenn φ eine beliebige Isometrie von \mathbb{R}^2 ist, dann ist auch $\tau_{-\varphi(0)} \circ \varphi$ eine, und sie lässt den Nullpunkt fest.

Aber eine Isometrie der Ebene, die den Nullpunkt festlässt ist offensichtlich linear, denn Parallelogramme werden auf ebensolche abgebildet. (In der Vorlesung habe ich hier genauer argumentiert.) Daher gibt es eine orthogonale Matrix A , sodass

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 : \tau_{-\varphi(0)} \circ \varphi(x) = Ax.$$

Anders gesagt ist φ selbst von der Gestalt

$$\varphi(x) = A \cdot x + t$$

mit $t = \varphi(0)$.

Dasselbe Argument lässt sich wortgleich für den \mathbb{R}^n wiederholen. Bis auf einen Translationsanteil ist jede Isometrie linear.

b) Jede Isometrie φ von \mathbb{S}^2 bildet eine Orthonormalbasis $\{b_1, b_2, b_3\}$ von \mathbb{R}^3 wieder auf eine solche ab, denn das ist ein Tripel von Vektoren, die paarweise (sphärischen) Abstand $\frac{\pi}{2}$ haben.

Also gibt es eine Matrix $A \in O(3)$, sodass

$$\forall i : \varphi(b_i) = A \cdot b_i.$$

Da die Multiplikation mit A auch eine sphärische Isometrie vermittelt, sie ist ja winkeltreu, ist $v \mapsto A^{-1} \cdot \varphi(v)$ eine Isometrie der Sphäre, die unsere ONB festlässt. Da ein Punkt $x \in \mathbb{S}^2$ aber durch seine Abstände zu b_1, b_2, b_3 festgelegt wird, ist diese Isometrie die Identität, und das heißt:

$$\forall v \in \mathbb{S}^2 : \varphi(v) = A \cdot v.$$

Damit ist die Isometriegruppe von \mathbb{S}^2 einfach die Matrizen­gruppe $O(3)$.

c) In beiden Fällen sehen wir, dass die Isometriegruppe transitiv wirkt, das heißt: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ gibt es eine Isometrie, die x auf y abbildet (dafür langen schon die Translationen) und für alle $v, w \in \mathbb{S}^2$ gibt es eine Isometrie, die v auf w abbildet.

Das wird für die meisten metrischen Räume sicher nicht so sein, zum Beispiel für das Intervall $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ gibt es nur die zwei Isometrien $x \mapsto \pm x$, und das ist hochgradig nicht transitiv.

Konstruktion 2.1.6 Faktorräume

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Für zwei Teilmengen $A, B \subseteq X$ bezeichnen wir mit

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

den *Abstand von A zu B* .

Dieser Abstand wird oft 0 sein, auch wenn die Mengen nicht gleich sind, es ist also keine Abstandsfunktion von der Potenzmenge von X .

Nun sei \sim eine Äquivalenzrelation auf X . Eine naheliegende Idee, wie man auf X/\sim eine Metrik einführen könnte, ist, den Abstand der Äquivalenzklassen $[x]$ und $[y]$ als $d([x], [y])$ einzuführen.

Wie gerade angedeutet geht dies nicht immer gut, eigentlich sogar nur ganz selten.

Es ist klar, dass die Funktion symmetrisch wäre. Ein Problem ist die Positivität, und diese kann man fast nur dadurch erreichen, dass man fordert, dass die Abstände zwischen zwei verschiedenen Äquivalenzklassen immer positiv sind.

Aber auch dann ist die Dreiecksungleichung noch nicht selbstverständlich und oft falsch.

Eine interessante Situation ist die folgende:

Wenn $\Gamma \subseteq \text{Iso}(X, d)$ eine Gruppe ist, sodass zwei verschiedene Bahnen Γx und Γy immer positiven Abstand haben, dann definiert d auf dem Bahnenraum X/Γ eine Metrik.

Begründung: Wir müssen nur noch die Dreiecksungleichung nachweisen. Da die Elemente aus Γ Isometrien sind, gilt für alle $x, y \in X$ und alle $\gamma, \gamma' \in \Gamma$:

$$d(\gamma(x), \gamma'(y)) = d(x, \gamma^{-1}(\gamma'(y))),$$

also haben wir

$$d(\Gamma x, \Gamma y) = \inf\{d(x, \gamma(y)) \mid \gamma \in \Gamma\}.$$

Für die Bahnen dreier Punkte $x, y, z \in X$ gilt daher

$$\begin{aligned} d(\Gamma x, \Gamma z) &= \inf\{d(x, \gamma z) \mid \gamma \in \Gamma\} \\ &\leq \inf\{d(x, \gamma'(y)) + d(\gamma'(y), \gamma(z)) \mid \gamma, \gamma' \in \Gamma\} \\ &= \inf\{d(x, \gamma'(y)) + d(y, \gamma(z)) \mid \gamma, \gamma' \in \Gamma\} \\ &= \inf\{d(x, \gamma'(y)) \mid \gamma' \in \Gamma\} + \inf\{d(y, \gamma(z)) \mid \gamma \in \Gamma\} \\ &= d(\Gamma x, \Gamma y) + d(\Gamma y, \Gamma z). \end{aligned}$$

Das ist die Dreiecksungleichung.

Beispiel 2.1.7 Der Torus

Ein außerordentlich wichtiges Beispiel in diesem Kontext ist das Folgende. Wir werden später noch sehr ausführlich darauf zurückkommen.

- a) Es sei $X = \mathbb{R}$ die Zahlengerade mit der üblichen Metrik. Darauf operiert \mathbb{Z} durch Translation, und diese sind alle Isometrien. Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ zwei Zahlen, die in verschiedenen \mathbb{Z} -Bahnen liegen, das heißt: ihre Differenz ist nicht ganzzahlig.

Dann gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass

$$x + k - \frac{1}{2} < y \leq x + k + \frac{1}{2},$$

und da jeder andere Vertreter der Klasse von x sich um eine ganze Zahl von $x + k$ unterscheidet, und jeder andere Vertreter der Klasse von y sich um eine ganze Zahl von y unterscheidet, ist der Minimale Abstand zweier Elemente von $[x]$ und $[y]$ tatsächlich

$$|y - (x + k)| > 0.$$

In diesem Fall ist also tatsächlich die Bedingung an die Existenz des metrischen Faktorraums gegeben, und wir erhalten eine Metrik auf $\mathbb{R}/\sim = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Dieser Raum entsteht, indem wir aus jeder Klasse einen Vertreter zwischen 0 und 1 wählen und anschließend noch 0 und 1 identifizieren: Das ist ein Kreis!

Genauer: Die Abbildung

$$\omega : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \frac{1}{2\pi}\mathbb{S}^1, \quad [x] \mapsto \frac{1}{2\pi} \cdot (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)),$$

ist wohldefiniert und tatsächlich eine Isometrie!

- b) Ganz analog lässt sich im Fall $X = \mathbb{R}^n$ argumentieren, wenn die Relation \sim gegeben ist durch

$$x \sim y \iff (x - y) \in \mathbb{Z}^n.$$

Das sind die Bahnen der \mathbb{Z}^n -operation durch Translationen auf \mathbb{R}^n , und dies sind alles Isometrien. Auch hier kommen sich die Bahnen nicht beliebig nahe.

Geometrisch sollte man sich etwa $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ wie einen Fahrradschlauch vorstellen (ohne Ventil und sonstige Löcher allerdings...).

Den Raum $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ nennt man auch den n -dimensionalen Torus, wobei der Singular nur topologisch legitim ist. Zum Beispiel sind \mathbb{R}/\mathbb{Z} und $\mathbb{R}/2\mathbb{Z}$ nicht isometrisch zueinander und von daher als metrische Räume nicht miteinander identifizierbar.

2.2 Vollständigkeit

Definition 2.2.1 Folgen und Grenzwerte

Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

- a) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X heißt *konvergent gegen den Grenzwert* $y \in X$, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y) = 0.$$

Natürlich ist y hierbei eindeutig bestimmt.

- b) Eine Cauchyfolge¹ in X ist eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n > N : d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

- c) X heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in X einen Grenzwert in X hat.

¹Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857

Beispiel 2.2.2 Schatten der Vergangenheit

Jeder endlichdimensionale euklidische Vektorraum ist vollständig.

Die Konvergenz einer Folge in $\mathcal{B}(X)$ mit der ∞ -Norm ist einfach die gleichmäßige Konvergenz im Sinne der Analysis. Insbesondere ist $\mathcal{B}(X)$ mit dieser Metrik vollständig. Denn wenn (f_n) eine Folge beschränkter Funktionen ist, die eine Cauchyfolge bezüglich der Supremumsnorm bildet, dann bilden auch für jedes $x \in X$ die Funktionswerte $(f_n(x))$ eine Cauchyfolge von reellen Zahlen, die daher gegen eine Zahl $f(x)$ konvergiert. Die dadurch definierte Funktion f ist wieder beschränkt und offensichtlich der Limes der Folge (f_n) .

\mathbb{Q} mit der p -adischen Metrik ist nicht vollständig. Zum Beispiel lässt sich für $p = 5$ eine Cauchyfolge konstruieren, deren Grenzwert eine Quadratwurzel aus -1 sein müsste, die aber bekanntlich in \mathbb{Q} nicht liegt.

Definition 2.2.3 Dichtheit

Es sei (\tilde{X}, d) ein metrischer Raum und $X \subseteq \tilde{X}$ eine Teilmenge. Dann heißt X *dicht in \tilde{X}* , falls für jedes $\tilde{x} \in \tilde{X}$ und jedes $r > 0$ ein $x \in X$ existiert mit

$$d(x, \tilde{x}) < r.$$

Insbesondere:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in X : d(x_n, \tilde{x}) < \frac{1}{n}.$$

Das heißt, dass jedes \tilde{x} sich als Limes einer Cauchyfolge in X schreiben lässt.

Beispiel: \mathbb{Q} liegt dicht in \mathbb{R} .

Wir wollen jetzt einsehen, dass jeder metrische Raum X in einem (geeignet konstruierten) vollständigen metrischen Raum \tilde{X} dicht liegt.

Konstruktion 2.2.4 Die Kompletterung

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir wollen einen vollständigen metrischen Raum (\tilde{X}, \hat{d}) konstruieren, der (X, d) als dichten Teilraum enthält.

Idee: Solch ein Raum enthält dann einen Grenzwert für alle Cauchyfolgen in X , und jeder Punkt ist so ein Grenzwert. Wir sollten also \tilde{X} konstruieren können, indem wir mit Cauchyfolgen in X spielen. Allerdings gibt es viele Cauchyfolgen, die denselben Grenzwert haben müssen.

Um dieses Programm in die Tat umzusetzen gehen wir aus von der Menge C aller X -wertigen Cauchyfolgen. Auf dieser Menge haben wir etwas ähnliches wie eine Metrik, indem wir für zwei Cauchyfolgen $(x_n), (y_n)$

$$\hat{d}((x_n), (y_n)) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

setzen.

Dieser Limes (reeller Zahlen) existiert, denn für alle $r > 0$ und große Werte von n, m gilt

$$\begin{aligned} |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| &= |d(x_n, y_n) - d(x_n, y_m) + d(x_n, y_m) - d(x_m, y_m)| \\ &\leq |d(x_n, y_n) - d(x_n, y_m)| + |d(x_n, y_m) - d(x_m, y_m)| \\ &\leq d(y_n, y_m) + d(x_n, x_m) < r. \end{aligned}$$

\hat{d} erfüllt Symmetrie und Dreiecksungleichung, aber ist nicht unbedingt positiv für verschiedene Folgen. Aber aus $\hat{d}((x_n), (y_n)) = 0$ folgt, dass auch die Folge

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots$$

eine Cauchyfolge ist, also (x_n) und (y_n) denselben Grenzwert besitzen müssen, wenn es dann überhaupt einen gibt.

Um \tilde{X} zu konstruieren sollte man also solche Folgen als nicht wesentlich verschieden ansehen.

Wie definieren

$$(x_n) \sim (y_n) : \iff \hat{d}((x_n), (y_n)) = 0.$$

Das liefert eine Äquivalenzrelation auf C .

Nun setzen wir $\tilde{X} := C / \sim$. Für zwei Äquivalenzklassen $[(x_n)], [(y_n)] \in \tilde{X}$ definieren wir

$$\tilde{d}([(x_n)], [(y_n)]) := \hat{d}((x_n), (y_n)).$$

Das ist wohldefiniert und liefert nun tatsächlich einen metrischen Raum.

Nun soll aber \tilde{X} unser gutes altes X enthalten. Das machen wir künstlich, indem wir eine abstandserhaltende Abbildung

$$\varphi : (X, d) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{d})$$

einführen durch

$$\varphi(x) := [(x, x, x, x, x, \dots)].$$

Wir identifizieren X mit seinem Bild unter der (injektiven) Abbildung φ . Tatsächlich ist X dann dicht in \tilde{X} , denn für jede Cauchyfolge $(x_n) \in C$ konvergiert die Folge $(\varphi(x_n))_n$ gegen die Klasse von (x_n) .

Das einzige, was uns noch fehlt, ist, dass \tilde{X} vollständig ist.

Bemerkung 2.2.5 Was ist mit \mathbb{R} ?

Bei dieser Konstruktion haben wir benutzt, dass die reellen Zahlen vollständig sind. Sie lässt sich also nicht ohne weiteres benutzen, um aus den rationalen Zahlen die reellen zu konstruieren. Was insbesondere fehlt ist die Abbildung \hat{d} , die wir hier benutzen, um \tilde{X} und die Metrik darauf zu definieren. Eine technische Modifikation, die hier nicht vorgeführt wird, ermöglicht es aber dennoch, die wesentlichen Argumente hier zu übertragen.

Proposition 2.2.6 Nachweis der Vollständigkeit

Der eben konstruierte metrische Raum (\tilde{X}, \tilde{d}) ist vollständig.

Beweis. Es sei $(\kappa_n)_n$ eine Cauchyfolge in \tilde{X} . Für jede Klasse κ_n wählen wir einen Vertreter $(x_{n,\cdot}) \in C$.

Wir müssen die Existenz einer Cauchyfolge $(y_m) \in C$ sehen, für die

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{d}((x_{n,\cdot}), (y_m)) = 0$$

gilt.

Die Idee hierbei ist natürlich, aus jeder der Folgen $(x_{n,\cdot})$ ein sehr spät auftretendes Folgenglied zu wählen und dieses dann y_n zu nennen. Man muss jetzt nur präzisieren, was „sehr spät“ hier bedeuten soll. Dies wird jetzt leicht modifiziert durch die folgende Überlegung.

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $N_k \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m, n \geq N_k$ die Ungleichung

$$\hat{d}((x_{n,\cdot}), (x_{m,\cdot})) \leq \frac{1}{k}$$

gilt.

Außerdem gibt es ein $L_k \in \mathbb{N}$, sodass für alle $l \geq L_k$ auch

$$d(x_{N_k, L_k}, x_{N_k, l}) \leq \frac{1}{k}.$$

Wir setzen

$$y_k := x_{N_k, L_k}.$$

Dann ist $(y_k)_k \in C$, denn für alle $r > 0$ und alle $k, l \geq \frac{1}{r}$ gilt

$$d(y_k, y_l) \leq 3r.$$

Außerdem ist $[(y_k)_k]$ nach Konstruktion der Grenzwert unserer alten Cauchyfolge in \tilde{X} . ○

Bemerkung 2.2.7 Zum Umgang mit Sätzen

Wie so häufig in der Mathematik ist es jetzt am Ende nicht mehr so wichtig, wie genau das \tilde{X} konstruiert wird. Es gibt ein Objekt mit den genannten Eigenschaften, und meistens langt dieses Wissen, um mit dem konstruierten Objekt umgehen zu können, denn durch seine Eigenschaften – es ist vollständig und X liegt dicht darin – kann man alles, was an metrischen Eigenschaften darüber zu sagen ist, erklären.

Wenn Y ein anderer vollständiger metrischer Raum ist, zu dem man eine abstandserhaltende Abbildung $\iota : X \rightarrow Y$ findet, dann lässt sich ι auf genau eine Art zu einer abstandserhaltenden Abbildung $\tilde{\iota} : \tilde{X} \rightarrow Y$ fortsetzen, indem für jede Cauchyfolge (x_n) in X

$$\tilde{\iota}(\lim(x_n)) := \lim(\iota(x_n))$$

gesetzt wird. Das ist wohldefiniert.

Dann ist $\tilde{\iota}(\tilde{X})$ isometrisch zu \tilde{X} und enthält $\iota(X)$ als dichte Teilmenge.

2.3 Stetige Abbildungen

Definition 2.3.1 Kugeln

Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$ sowie $r > 0$ eine reelle Zahl. Dann heißt

$$B_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

die *offene Kugel* vom Radius r um den Mittelpunkt x .

Vorsicht: Weder x noch r müssen durch die Menge $B_r(x)$ eindeutig bestimmt sein. Wenn zum Beispiel X mit der diskreten Metrik ausgestattet ist, so ist $X = B_2(x) = B_3(y)$ für alle $x, y \in X$.

Definition 2.3.2 Stetigkeit

Es seien (X, d) und (Y, e) zwei metrische Räume. Dann heißt eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ stetig, falls für jedes $x \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)).$$

In Worten: Jede offene Kugel um $f(x)$ enthält das Bild einer offenen Kugel um x .

So ist zum Beispiel jede Abbildung von X nach Y stetig, wenn auf X die diskrete Metrik vorliegt. Denn dann ist ja $\{x\} = B_{\frac{1}{2}}(x)$ im Urbild jeder offenen Kugel um $f(x)$ enthalten.

Ist hingegen die Metrik auf Y diskret und $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, so sind nur konstante Abbildungen von X nach Y stetig, wie wir später noch verstehen werden. Das ist letztlich das topologische Pendant zum Zwischenwertsatz.

Beispiel 2.3.3 Stereographische Projektion - eine Variante

Es sei $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$. Der Punkt $N = (0, 0, \dots, 0, 1)$ liegt in \mathbb{S}^n und wird oft der Nordpol genannt. Weiter sei $H = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$ die „Äquatorialhyperebene“ von \mathbb{S}^n .

Für $P \in \mathbb{S}^n$, $P \neq N$, gibt es dann genau einen Punkt $\sigma(P) \in H$, sodass $N, P, \sigma(P)$ auf einer Geraden liegen.

Genauso gibt es für jedes $x \in H$ genau ein $\tau(x) \in \mathbb{S}^n$, $\tau(x) \neq N$, sodass $x, \tau(x), N$ auf einer Geraden liegen.

Die so definierten Abbildungen

$$\sigma : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow H, \quad \tau : H \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$$

sind zueinander invers und beide stetig (bezüglich der Metriken, die von \mathbb{R}^{n+1} herkommen).

Dies sieht man am einfachsten, indem man Formeln für σ und τ angibt. Diese Abbildungen sind gebrochen rationale Funktionen, die überall auf $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ bzw. H definiert sind.

Die „richtige“ stereographische Projektion ist eine leichte Variante hiervon: Da legt man die Kugel auf die Ebene drauf und projiziert von N aus auf die Ebene.

Natürlich können diese Abbildungen keine Isometrien sein, denn die Sphäre ist beschränkt, während die Hyperebene H dies nicht ist – außer im beschaulichen Fall $n = 0$.

Beispiel 2.3.4 Noch einmal die Analysis

Es seien X, Y metrische Räume. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{C}(X, Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen von X nach Y , und mit $\mathcal{C}_0(X, Y)$ die Menge aller beschränkten stetigen Abbildungen von X nach Y .

Wenn Y vollständig ist, dann ist auch $\mathcal{C}_0(X, Y)$ (als Teilraum von $\mathcal{B}(X, Y)$) vollständig. Hierzu muss man nachweisen, dass der gleichmäßige Limes einer Folge (f_n) von stetigen beschränkten Funktionen wieder stetig ist.

Tatsächlich gilt für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\forall n \geq N : \sup\{d(f_n(y), g(y)) \mid y \in X\} < \varepsilon/3,$$

das gehört zur gleichmäßigen Konvergenz. Außerdem gibt es ein $\delta > 0$, sodass

$$\forall y \in B_\delta(x) : d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon/3,$$

da f_n stetig ist.

Es folgt mit der Dreiecksungleichung:

$$\forall y \in B_\delta(x) : d(g(x), g(y)) \leq d(g(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(y)) + d(f_n(y), g(y)) < \varepsilon.$$

Das ist die Stetigkeit von g in $x \in X$.

Dasselbe Argument zeigt, dass eine punktweise konvergente Folge stetiger Funktionen sicher dann gegen eine stetige Funktion konvergiert, wenn die Konvergenz lokal gleichmäßig ist, was heißt:

$$\forall x \in X : \exists r > 0 : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall y \in B_r(x) : d(f_n(y), g(y)) < \varepsilon.$$

Im Fall $Y = \mathbb{R}$ lässt man das Y auch häufig weg und schreibt nur $\mathcal{C}(X)$ bzw. $\mathcal{C}_0(X)$. Beide Mengen haben algebraisch die Struktur eines Rings, da Summen und Produkte stetiger Funktionen wieder stetige Funktionen sind.

Hilfssatz 2.3.5 Normen

Es sei $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt versehen und N eine Norm auf V , d.h. $N : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ erfüllt

- $\forall v \in V : N(v) = 0 \iff v = 0$ (Positivität),
- $\forall a \in \mathbb{R}, v \in V : N(av) = |a|N(v)$ (Homogenität),
- $\forall v, w \in V : N(v + w) \leq N(v) + N(w)$ (Dreiecksungleichung).

Dann ist N stetig bezüglich der Standardmetrik.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Stetigkeit von N im Ursprung.

Es sei also $\delta > 0$.

Wegen der Positivität und der Homogenität gibt es eine Konstante $c > 0$ (abhängig von δ), sodass die Vektoren $\pm ce_i$, $1 \leq i \leq n$, in $N^{-1}(-\delta, \delta)$ liegen. Dabei ist $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis von \mathbb{R}^n .

Es sei $v \in B_{c/n}(0) \subseteq V$, d.h. $v = \sum_{i=1}^n a_i ce_i$, $\sum_i a_i^2 < 1/n^2$. Dann ist aber die Summe $\sum_i |a_i| < 1$.

Es folgt

$$N(v) \leq \sum N(a_i ce_i) \leq \sum |a_i| N(ce_i) < \delta \sum |a_i| \leq \delta.$$

Damit liegt die offene Kugel $B_{c/n}(0)$ im Urbild: N ist stetig im Ursprung.

Nun seien $x \in V$ beliebig und $\delta > 0$ vorgegeben. Dann gibt es nach dem eben gesehenen ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\forall y \in B_\varepsilon(0) : |N(y)| < \delta.$$

Für $y \in B_\varepsilon(0)$ gilt demnach wegen $N(x) = N(x + y - y) \leq N(x + y) + N(y)$:

$$-N(y) \leq N(x + y) - N(x) \leq N(y),$$

und daher $N(B_\varepsilon(x)) \subseteq B_\delta(N(x))$.

Das zeigt die Stetigkeit von N . ○

Definition/Bemerkung 2.3.6 Die Topologie eines metrischen Raums

- a) Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *offen*, falls für jedes $x \in A$ eine reelle Zahl $r > 0$ existiert, sodass $B_r(x) \subseteq A$ gilt.

Die Gesamtheit aller offenen Mengen in X heißt die *Topologie* von (X, d) .

- b) Ein Beispiel für eine offene Menge ist die offene Kugel $B_r(m), r > 0$. Denn: Für $x \in B_r(m)$ sei $s = d(x, m) < r$ und $\tilde{r} := (r - s)/2$. Das ist immer noch positiv, und wegen der Dreiecksungleichung gilt

$$B_{\tilde{r}}(x) \subseteq B_r(m).$$

Bemerkung 2.3.7 Eigenschaften

Die offenen Mengen eines metrischen Raums haben die folgenden beiden Eigenschaften: beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte von offenen Mengen sind wieder offen.

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen ist genau dann stetig, wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(U)$ offen in X ist. Das hängt nicht wirklich von der Metrik ab, sondern nur von den Topologien der beteiligten Räume.

Es kann sehr viele verschiedene Metriken auf X geben, die zur selben Topologie führen. So stimmen zum Beispiel für zwei Normen auf \mathbb{R}^n die zugehörigen Topologien überein, was im Wesentlichen aus Hilfssatz 2.3.5 folgt. Dieser Hilfssatz sagt nämlich, dass die Identität auf \mathbb{R}^n stetig ist, wenn wir auf Seiten des Definitionsbereichs die euklidische Standardlänge als Norm benutzen, und auf Bildseite die Norm N . Auch in der anderen Richtung ist die Identität stetig (das muss man noch beweisen!), und das impliziert die Gleichheit der zugehörigen Topologien.

Kapitel 3

Topologische Grundbegriffe

3.1 Topologische Räume und einige Konstruktionen

Definition 3.1.1 Topologischer Raum

Ein *topologischer Raum* ist eine Menge X , für die eine Teilmenge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften ausgewählt wurde:

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- $\forall A, B \in \mathcal{T} : A \cap B \in \mathcal{T}$
- $\forall \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} : \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A \in \mathcal{T}$.

Hierbei heißt \mathcal{T} die *Topologie* auf X , und die Elemente von \mathcal{T} sind die *offenen Mengen* des topologischen Raums (X, \mathcal{T}) .

Die Mengen $X \setminus A, A \in \mathcal{T}$, heißen *abgeschlossene Teilmengen* von X .

Beispiel 3.1.2 Alte Bekannte

Die offenen Mengen eines metrischen Raums X bilden eine Topologie auf X .

Ist X eine beliebige Menge, so ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ eine Topologie auf X . Sie ist sogar die Topologie zu einer Metrik auf X , zur diskreten Metrik nämlich. Sie heißt die *diskrete Topologie*.

Auch $\{\emptyset, X\}$ ist eine Topologie auf X .

Auf $\{0, 1\}$ gibt es die Topologie $\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$. Diese kommt nicht von einer Metrik her.

Definition 3.1.3 Inneres, Abschluss und der zu schmale Rand

Es seien X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Das *Innere* (oder auch der *offene Kern*) $\overset{\circ}{A}$ von A ist definiert als die Vereinigung

$$\overset{\circ}{A} := \bigcup_{U \subseteq_o A} U,$$

wobei das Symbol \subseteq_o bedeutet, dass U eine (in X) offene Teilmenge von A ist.

$\overset{\circ}{A}$ ist die größte offene Teilmenge von A .

Der *Abschluss* \bar{A} von A ist definiert als der Durchschnitt aller abgeschlossenen Teilmengen von X , die A enthalten.

\bar{A} ist abgeschlossen, es gibt keine kleinere abgeschlossene Teilmenge, die A enthält.

Der *Rand* von A ist die Menge $\partial A := \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Beispiel 3.1.4 Im metrischen Raum

Es sei (X, d) ein metrischer Raum mit der zugehörigen Topologie und $A \subset X$. Dann ist

$$\overset{\circ}{A} = \{a \in A \mid \exists r > 0 : B_r(a) \subseteq A\}.$$

Weiter ist $X \setminus \bar{A}$ das Innere von $X \setminus A$, also

$$\bar{A} = \{x \in X \mid \forall r > 0 : B_r(x) \cap A \neq \emptyset\}$$

und damit

$$\partial A = \{x \in X \mid \forall r > 0 : B_r(x) \cap A \neq \emptyset \neq B_r(x) \cap (X \setminus A)\}.$$

Aber Vorsicht: Der Abschluss einer offenen Kugel mit Radius r muss nicht die abgeschlossene Kugel mit diesem Radius sein. zum Beispiel ist in einem Raum mit diskreter Metrik die Kugel $B_1(x) = \{x\}$, aber die Menge aller Punkte in X , die von x Abstand ≤ 1 haben, ist X selbst.

Definition 3.1.5 Dichtheit, Diskretheit

Es sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $D \subseteq X$ heißt *dicht*, wenn ihr Abschluss ganz X ist.

Jede Teilmenge ist also dicht in ihrem Abschluss, wenn man diesen wie in 3.1.9 als topologischen Raum betrachtet.

Eine Teilmenge $D \subseteq X$ heißt *diskret*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung besitzt, die mit D endlichen Durchschnitt hat.

Für metrische Räume heißt das gerade, dass D keinen Häufungspunkt besitzt.

Definition 3.1.6 Umgebungen, Basis einer Topologie

Es sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum.

- a) Für $x \in X$ heißt eine Teilmenge $A \subseteq X$ eine *Umgebung* von x , falls eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ existiert mit $x \in U \subseteq A$. Ist A selbst schon offen, so heißt es eine *offene Umgebung* von x (falls $x \in A$).
- b) Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ heißt eine *Basis* von \mathcal{T} , falls jedes Element von \mathcal{T} sich schreiben lässt als Vereinigung von Elementen aus \mathcal{B} .

(So sind zum Beispiel die offenen Kugeln $B_r(x)$ eine Basis der Topologie auf einem metrischen Raum.)

\mathcal{B} heißt eine *Subbasis* von \mathcal{T} , falls sich jedes $U \in \mathcal{T}$ als Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Elementen aus \mathcal{B} schreiben lässt.

Kleine Subtilität am Rande: Der Schnitt einer endlichen Menge von Teilmengen von X wird hierbei gegeben als die Menge aller $x \in X$, die in jeder der beteiligten Mengen liegen. Ist diese endliche Familie leer, so erfüllte jedes $x \in X$ diese Bedingung, die ja nichts abverlangt...

$$\bigcup_{i \in \emptyset} U_i = X.$$

Der feste Rahmen X ist hierbei natürlich unerlässlich.

- c) Für $x \in X$ heißt eine Menge \mathcal{U} von offenen Umgebungen von x eine *Umgebungsbasis* von x , wenn jede Umgebung von x ein Element von \mathcal{U} als Teilmenge enthält.

Bemerkung 3.1.7 Einsichtig

Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ ist genau dann eine Basis der Topologie \mathcal{T} , wenn sie für jedes $x \in X$ eine Umgebungsbasis enthält.

Für jede Teilmenge \mathcal{B} von $\mathcal{P}(X)$ gibt es genau eine Topologie, die \mathcal{B} als Subbasis besitzt. Sie ist die *von \mathcal{B} erzeugte* Topologie, und besitzt

$$\{U_1 \cap \dots \cap U_n \mid n \in \mathbb{N}, U_i \in \mathcal{B}\}$$

als Basis.

Definition 3.1.8 Feinheiten

Wenn $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf einer Menge X sind, so heißt \mathcal{T}_1 *feiner* als \mathcal{T}_2 , wenn $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$, also wenn \mathcal{T}_1 mehr offene Mengen besitzt als \mathcal{T}_2 .

Die feinste Topologie auf X ist also die diskrete, während $\{\emptyset, X\}$ die grösste Topologie auf X ist (alle anderen Topologien sind feiner).

Zu je zwei Topologien gibt es eine gemeinsame Verfeinerung. Die größte gemeinsame Verfeinerung ist die Topologie, die die Vereinigung der beiden gegebenen als Subbasis besitzt.

Die feinste aller Topologien ist $\mathcal{P}(X)$, die größte ist $\{\emptyset, X\}$. Die sind beide in theoretischer Hinsicht wichtig aber ansonsten uninteressant, denn sie beinhalten keinerlei spezielle Information über X .

Nun möchte man wieder Verfahren kennenlernen, mit denen sich aus gegebenen topologischen Räumen weitere konstruieren lassen. Die ersten beiden sind:

Definition 3.1.9 Spurtopologie und Produkte

- a) Es seien X eine Menge und (Y, \mathcal{S}) ein Topologischer Raum. Weiter sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Für Teilmengen $A_i \subseteq Y$ ($i \in I$) gilt

$$f^{-1}\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(A_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_i A_i\right) = \bigcap_i f^{-1}(A_i).$$

Das zeigt bereits, dass

$$\mathcal{T} := \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{S}\}$$

eine Topologie auf X ist. Man nennt sie die *Spurtopologie* auf X (bezüglich f).

Damit können wir unheimlich viele neue topologische Räume konstruieren. (Tun Sie das!)

- b) Ist speziell $X \subseteq Y$ und f die Einbettung dieser Teilmenge, so nennt man X (mit der Spurtopologie) einen *Teilraum* von Y .

Eine Teilmenge A von X ist genau dann offen bezüglich der Spurtopologie, wenn es eine offene Teilmenge U von Y gibt mit $A = U \cap X$.

- c) Sind X, Y zwei topologische Räume, so definieren wir auf $X \times Y$ die *Produkttopologie*, indem wir als Basis die Produkte $U \times V$ für offene $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ verwenden.

Das ist die größte Topologie, für die beide Projektionen

$$\pi_X : X \times Y \rightarrow X \quad \text{und} \quad \pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$$

stetig sind (siehe Abschnitt 3.3). Insbesondere ist das auch so etwas wie eine Spurtopologie, aber eben für mehr als eine Abbildung.

Konstruktion 3.1.10 Quotiententopologie

Es sei X ein topologischer Raum und \equiv eine Äquivalenzrelation auf X . Dann wird auf dem Raum X/\equiv der Äquivalenzklassen von X eine Topologie eingeführt, indem man $V \subseteq X/\equiv$ als offen erklärt genau dann, wenn

$$\pi^{-1}(V) = \{u \in X \mid [u] \in V\}$$

in X offen ist. Dabei ist π die kanonische Projektion.

Das ist die feinste Topologie auf X/\equiv , für die π stetig ist (siehe Abschnitt 3.3).

Diese Topologie heißt die *Quotiententopologie* auf X/\equiv .

Damit bekommen wir zum Beispiel eine Topologie auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ oder $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Die Topologie auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ verdient hier historisch und didaktisch besondere Aufmerksamkeit. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist genau dann offen, wenn $A \cap \mathbb{C}$ offen ist und wenn zusätzlich im Fall $\infty \in A$ ein $R > 0$ existiert mit

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \subseteq A.$$

3.2 Wichtige topologische Eigenschaften**Definition 3.2.1 Kompaktheit**

Ein topologischer Raum X heißt *kompakt*, wenn jede Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ von X durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung enthält:

$$\exists n \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_n \in I : X = \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}.$$

Genauso heißt eine Teilmenge von X kompakt, wenn sie bezüglich der Spurtopologie (der Inklusion) kompakt ist.

Anstelle des Begriffs „kompakt“ wird auch gelegentlich „überdeckungsendlich“ verwendet. Es ist nicht ganz einheitlich, ob zur Kompaktheit auch die Eigenschaft, hausdorffsch zu sein (siehe später), gehört oder nicht. Wir wollen hier Kompaktheit so verstehen wie gesagt.

Hilfssatz 3.2.2 Kompakta in metrischen Räumen

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gelten:

- a) Ist X kompakt, so ist X beschränkt.
- b) Ist $A \subseteq X$ kompakt, so ist A abgeschlossen.
- c) Ist X kompakt, so ist X vollständig.

Beweis.

a) Ein kompakter metrischer Raum X ist sicher beschränkt, denn

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(x)$$

gilt für jedes $x \in X$, und das ist eine offene Überdeckung von X . Es langen also endlich viele $B_n(x)$, um X zu überdecken, und von diesen langt dann auch die größte: $X = B_n(x)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Daher ist X beschränkt.

b) Eine kompakte Teilmenge A eines metrischen Raums X ist abgeschlossen.

Ist nämlich $x \in X \setminus A$ im Komplement von A , so ist

$$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{y \in X \mid d(y, x) > 1/n\}$$

eine offene Überdeckung von A , und damit langen endlich viele dieser Mengen, um A zu überdecken. Es ist also

$$A \subseteq \{y \in X \mid d(y, x) > 1/n\}$$

für ein festes $n \in \mathbb{N}$, und daher ist $B_{1/n}(x)$ in $X \setminus A$ enthalten.

c) Es sei X kompakt und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Wir nehmen an, diese konvergiere nicht, und führen diese Annahme zum Widerspruch.

Es sei $y \in X$. Da die Folge nicht konvergiert, gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x_n \notin B_\varepsilon(y)$.

Andererseits ist die Folge eine Cauchy-Folge, das heißt:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall k, l > N : d(x_k, x_l) \leq \varepsilon/2.$$

Wäre für ein $k > N$ das Folgenglied $x_k \in B_{\varepsilon/2}(y)$, so wäre nach der Dreiecksungleichung für jedes $l > N$ auch $x_l \in B_\varepsilon(y)$.

Das zeigt, dass höchstens die Folgenglieder x_n mit $n \leq N$ in $B_{\varepsilon/2}(y)$ liegen.

Wir halten fest, dass jedes $y \in X$ eine offene Umgebung U_y hat, in der nur endlich viele Folgenglieder liegen.

Nun ist aber $X = \bigcup_{y \in X} U_y$ eine offene Überdeckung von X . Da X kompakt ist, gibt es endlich viele $y_1, \dots, y_n \in X$ mit

$$X = \bigcup_{j=1}^n U_{y_j}.$$

In jedem U_y liegen aber nur endlich viele Folgenglieder, also ist die Folge endlich, da sie ganz in X verläuft. Das ist der gewünschte Widerspruch. \circ

Bemerkung 3.2.3 Erstes über Kompakta in topologischen Räumen

a) Eine abgeschlossene Teilmenge A eines kompakten Raums X ist kompakt, denn für jede Überdeckung \ddot{U} von A durch offene Teilmengen von X ist $\ddot{U} \cup \{X \setminus A\}$ eine offene Überdeckung von X , also langen endlich viele davon, um X zu überdecken, und von diesen endlich vielen kann man (falls beteiligt) $X \setminus A$ weglassen, um eine endliche Teilüberdeckung von A durch Mengen in \ddot{U} zu erhalten.

b) Im allgemeinen muss eine kompakte Teilmenge eines topologischen Raums nicht abgeschlossen sein, siehe Beispiel c) in 3.2.5.

c) Der Durchschnitt eines Kompaktums K in einem topologischen Raum X mit einer diskreten Teilmenge D ist endlich.

Denn: Jedes $x \in X$ besitzt nach Definition der Diskretheit eine offene Umgebung U_x , die mit D endlichen Schnitt hat. Nun ist aber

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} U_x$$

eine offene Überdeckung, und damit gibt es wegen der Kompaktheit von K endlich viele $x_1, \dots, x_n \in K$, sodass

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i},$$

und es ist

$$K \cap D \subseteq \bigcup_{i=1}^n (U_{x_i} \cap D)$$

eine endliche Vereinigung von endlichen Mengen.

Satz 3.2.4 à la Heine¹-Borel²

Es sei X ein vollständiger metrischer Raum, in dem sich jede beschränkte Menge $A \subseteq X$ für jedes $\varepsilon > 0$ durch endlich viele Mengen von Durchmesser $\leq \varepsilon$ überdecken lässt.

Dann gilt:

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Beweis: In der einen Richtung haben wir es schon gesehen: ein Kompaktum in einem metrischen Raum ist abgeschlossen und beschränkt.

¹Heinrich-Eduard Heine, 1821-1881

²Emile Borel, 1871-1956

Sei umgekehrt $A \subseteq X$ abgeschlossen und beschränkt. Weiter sei \ddot{U} eine offene Überdeckung von A . Nehmen wir an, es gebe in \ddot{U} keine endliche Teilüberdeckung von A .

In A gibt es eine abgeschlossene Teilmenge $A_1 \subseteq A$ von Durchmesser ≤ 1 , die sich nicht durch endlich viele $U \in \ddot{U}$ überdecken lässt, da A ja nach Voraussetzung eine endliche Vereinigung von Mengen vom Durchmesser ≤ 1 ist.

Wir wählen – wieder unter Ausnutzung der Eigenschaft von X – sukzessive Teilmengen

$$A \supseteq A_1 \supseteq A_2 \cdots \supseteq A_k \supseteq \dots$$

derart, dass A_k Durchmesser $\leq 1/2^k$ hat und sich nicht durch endlich viele $U \in \ddot{U}$ überdecken lässt.

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ wählen wir nun ein Element $x_i \in A_i$. (So etwas gibt es, nicht wahr?)

Dann ist $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, denn

$$d(x_i, x_k) \leq 1/2^{\min(i,k)}.$$

Also konvergiert die Folge gegen ein $x \in A$, da X vollständig und A abgeschlossen ist.

Dieses x liegt also in einem $U \in \ddot{U}$, und da U offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ gilt. Daher liegt für großes k auch A_k ganz in U , was der Konstruktion der Teilmengen A_k widerspricht.

Diese ist also nicht möglich, und damit ist A eben doch kompakt. \circ

Bemerkung 3.2.5 Beispielmateriale

- a) Als Spezialfall erhalten wir den klassischen Satz von Heine-Borel, der sagt, dass eine Teilmenge von \mathbb{R}^n genau dann überdeckungsendlich ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Heine hat diesen Satz 1872 für Intervalle in \mathbb{R} benutzt, um zu zeigen, dass eine stetige Funktion auf einem beschränkten und abgeschlossenen Intervall gleichmäßig stetig ist. Borel war zu dieser Zeit noch anderweitig beschäftigt.

- b) Ein metrischer Raum, in dem diese Äquivalenz nicht gilt, ist zum Beispiel der folgende:

Es sei $X := \mathcal{C}_0(\mathbb{N})$ der Raum der beschränkten Funktionen auf \mathbb{N} (siehe 2.1.2).

Für $n \in \mathbb{N}$ sei δ_n die Funktion auf \mathbb{N} , die bei n den Wert 1 annimmt, und sonst den Wert 0. Die Menge

$$D := \{\delta_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ist eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von X . Aber kompakt ist sie nicht, denn in $B_{1/2}(\delta_n)$ liegt kein weiteres $\delta_k, k \in \mathbb{N}$, und so ist

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{1/2}(\delta_n)$$

eine offene Überdeckung von D ohne endliche Teilüberdeckung.

In der Funktionalanalysis spielen ähnliche Räume eine wichtige Rolle, und insbesondere die Frage, wann die abgeschlossene Einheitskugel in einem normierten Vektorraum kompakt ist.

- c) Es gibt auch topologische Räume, in denen *jede Teilmenge* kompakt ist, egal ob offen, abgeschlossen, keins von beiden...

Das erste Beispiel hierfür ist eine beliebige Menge X versehen mit der größten Topologie $\{X, \emptyset\}$.

Etwas feiner ist die *koendliche* Topologie auf X . Dies heißt, dass (außer der leeren Menge) eine Menge U genau dann offen ist, wenn $X \setminus U$ endlich ist.

Klar: hier ist alles kompakt. Denn für $A \subseteq X$ und offenes $U \neq \emptyset$ überdeckt U bereits alles bis auf endlich viele Elemente von A .

- d) Eine wichtige Beispielklasse für kompakte Räume sind die projektiven Räume $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ und $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Im Fall $n = 1$ sieht man die Kompaktheit sehr schön wie folgt: Ist \ddot{U} eine offene Überdeckung von $X = \mathbb{P}^1(K)$ (mit $K = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}), so gibt es darin eine Menge $U_\infty \in \ddot{U}$, sodass $\infty \in U_\infty$. Das Komplement von U_∞ ist nach Konstruktion der Topologie auf $X = K \cup \{\infty\}$ abgeschlossen und beschränkt (siehe 3.1.10 d)) und daher kompakt wegen Heine-Borel. Also reichen endlich viele weitere Elemente aus \ddot{U} , um $K \setminus U_\infty$ zu überdecken.

Definition 3.2.6 zusammenhängend

Es sei X ein topologischer Raum. Dann heißt X *zusammenhängend*, wenn \emptyset und X die einzigen Teilmengen von X sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind. Das ist äquivalent dazu, dass es keine Zerlegung von X in zwei nichtleere, disjunkte und offene Teilmengen gibt.

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *zusammenhängend*, wenn sie bezüglich der Teilraumtopologie zusammenhängend ist, also genau dann, wenn sie nicht in der Vereinigung zweier offener Teilmengen von X liegt, deren Schnitte mit A nichtleer und disjunkt sind.

Die Vereinigung zweier zusammenhängender Teilmengen mit nichtleerem Durchschnitt ist wieder zusammenhängend.

Beispiel 3.2.7 Intervalle

Die zusammenhängenden Teilmengen von \mathbb{R} sind gerade die Intervalle, egal ob offen oder abgeschlossen oder \dots . Dabei werden auch die leere Menge und ein-elementige Mengen als Intervalle gesehen.

Ist nämlich $A \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend und sind $x < y$ beide in A , so liegt auch jeder Punkt z zwischen x und y in A , da sonst

$$A = (A \cap (-\infty, z)) \cup (A \cap (z, \infty))$$

eine disjunkte, nichttriviale, offene Zerlegung von A wäre.

Ist umgekehrt A ein Intervall, so sei $A = B \cup C$ eine nichttriviale disjunkte Zerlegung. Ohne Einschränkung gebe es ein $b_0 \in B$ und ein $c_0 \in C$ mit $b_0 < c_0$.

Es sei $z := \sup\{b \in B \mid b < c_0\}$. Dies liegt in A , und damit auch in B oder C . Wäre $z \in B$ und B offen in A , so müsste es ein $r > 0$ geben mit

$$\forall a \in A : |z - a| < r \Rightarrow a \in B.$$

Also kann z nicht zu B gehören, wenn dies offen in A ist, denn es gibt Elemente $c \in C, c > z$, die beliebig nahe an z dran liegen.

Wäre $z \in C$ und C offen in A , so gäbe es ein $r > 0$, sodass

$$\forall a \in A : |z - a| < r \Rightarrow a \in C.$$

Das wiederum geht nicht, denn z ist das Supremum einer Teilmenge von B .

Also sind nicht sowohl B als auch C offen in A , und das zeigt, dass A zusammenhängend ist.

Definition 3.2.8 Zusammenhangskomponenten

Es sei X ein topologischer Raum. Wir nennen zwei Punkte x, y in X *äquivalent*, falls es eine zusammenhängende Teilmenge von X gibt, die beide enthält. Dies ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation:

- $x \simeq x$ ist klar für alle $x \in X$, denn $\{x\}$ ist zusammenhängend.
- Symmetrie ist auch klar, nicht wahr?
- Transitivität: Es seien $x \simeq y$ und $y \simeq z$, dann gibt es zusammenhängende $A, B \subseteq X$, sodass $x, y \in A$ und $y, z \in B$. Aber $A \cup B$ ist auch zusammenhängend, denn aus $A \cup B \subseteq U \cup V$ (offene Überdeckung) folgt $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$ und analog für B . Wären die Durchschnitte $(A \cup B) \cap U$ und $(A \cup B) \cap V$ disjunkt, so hätten wir also disjunkte offene Überdeckungen der zusammenhängenden Mengen A und B , und damit

folgt OBdA $A \subseteq U, A \cap V = \emptyset$. Genauso ist auch B in einer der beiden Mengen enthalten und hat mit der anderen leeren Schnitt. Aus $B \subseteq U$ folgt $V = \emptyset$, während aus $B \subseteq V$ folgt, dass U und V nicht disjunkt sind: beide enthalten y .

Die Äquivalenzklasse von x heißt die *Zusammenhangskomponente* von x . Diese ist immer abgeschlossen.

Definition 3.2.9 hausdorffsch

Ein topologischer Raum X heißt *hausdorffsch*³, wenn je zwei Punkte $x \neq y$ in X disjunkte Umgebungen haben.

Man sagt dann auch, X erfülle das Trennungsaxiom T_2 : verschiedene Punkte lassen sich durch Umgebungen trennen.

Bemerkung 3.2.10 Vererbung

Wenn X hausdorffsch ist, so auch jeder Teilraum von X .

Jeder metrische Raum ist hausdorffsch.

Das Produkt zweier Hausdorffräume ist wieder hausdorffsch.

Nicht hausdorffsch ist beispielsweise ein Raum X mit mindestens zwei Elementen und der Topologie $\{\emptyset, X\}$.

Bemerkung 3.2.11 Kompakta in Hausdorffräumen

Jedes Kompaktum K in einem Hausdorffraum X ist abgeschlossen.

Denn: Ist $x \in X \setminus K$, so gibt es für jedes $k \in K$ disjunkte offene Umgebungen U_k von k und V_k von x . Es ist $\tilde{U} := \{U_k \mid k \in K\}$ eine offene Überdeckung von K , und wegen der Kompaktheit gibt es endlich viele k_1, \dots, k_n in K , sodass

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{k_i}.$$

Dazu disjunkt ist $\bigcap_{i=1}^n V_{k_i}$, aber das ist eine offene Umgebung von x . Also liegt x nicht im Abschluss von K .

Als nächstes übertragen wir den Begriff der Stetigkeit in die topologische Welt. Eigentlich warten wir schon lange brennend darauf, denn schon in 2.3.7 hatten wir auf die Bemerkung wert gelegt, dass die Stetigkeit einer Abbildung zwischen metrischen Räumen nur von deren Topologie abhängt, und nicht von der Metrik.

³Felix Hausdorff, 1868-1942

3.3 Stetigkeit

Definition 3.3.1 Stetige Abbildungen, Homöomorphismen

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen zwei topologischen Räumen heißt *stetig*, falls für jede offene Teilmenge U von Y das Urbild $f^{-1}(U)$ in X offen ist.

Wir hatten dies bei metrischen Räumen als äquivalent zur klassischen $\delta - \varepsilon$ -Definition gesehen.

Wie bei metrischen Räumen werden wir mit $\mathcal{C}(X, Y)$ die Menge aller stetigen Abbildung zwischen den topologischen Räumen X und Y bezeichnen.

Eine stetige Abbildung, die bijektiv ist, und deren Umkehrabbildung auch stetig ist, heißt ein *Homöomorphismus*. Zwei topologische Räume, zwischen denen es einen Homöomorphismus gibt, heißen kreativer Weise *homöomorph*.

Beispiel 3.3.2 Stereographische Projektion

Wie in 2.3.3 gesagt ist die dort behandelte stereographische Projektion ein Homöomorphismus zwischen der n -dimensionalen Sphäre minus einem Punkt und dem n -dimensionalen euklidischen Standardraum.

Bemerkung 3.3.3 Sysiphos

In der Topologie betrachtet man zwei homöomorphe topologische Räume als im Wesentlichen gleich. Eine Eigenschaft eines topologischen Raums X heißt eine *topologische Eigenschaft*, wenn jeder zu X homöomorphe Raum diese Eigenschaft auch hat. Kompaktheit, Zusammenhang, Hausdorffizität sind solche Eigenschaften. Beschränktheit eines metrischen Raums ist keine topologische Eigenschaft.

Natürlich möchte man eine Übersicht gewinnen, wann zwei topologische Räume homöomorph sind, oder welche Homöomorphieklassen es insgesamt gibt. Das ist in dieser Allgemeinheit ein aussichtsloses Unterfangen. Es gibt (mindestens) zwei Möglichkeiten, die Wünsche etwas abzuschwächen: man kann sich entweder auf etwas speziellere topologische Räume einschränken oder den Begriff des Homöomorphismus ersetzen.

Das erstere passiert zum Beispiel bei der Klassifikation der topologischen Flächen (also zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten).

Für das zweitere bietet sich der Begriff der Homotopie an, der uns in Kapitel 4 begegnen wird.

Oft genug ist es sehr schwer nachzuweisen, dass zwei gegebene Räume nicht zueinander homöomorph sind. Wenn ich keine stetige Bijektion finde, sagt das vielleicht mehr über mich aus als über die Räume. Hier ist es manchmal hilfreich, topologischen Räumen besser greifbare Objekte aus anderen Bereichen der Mathematik zuordnen zu können, die für homöomorphe Räume isomorph sind, und

wo dies besser entschieden werden kann. Das ist eine Motivation dafür, algebraische Topologie zu betreiben oder allgemeiner eben Funktoren von der Kategorie der topologischen Räume in andere Kategorien zu untersuchen.

Dieser Standpunkt, der eine genauere Einführung in die universelle Sprache der Kategorientheorie voraussetzt, soll hier nicht im allgemeinen weiterverfolgt werden. Wir werden jedoch unter der Hand Argumente dieser Art noch sehen.

Bemerkung 3.3.4 Ringkampf

- a) Die Identität auf X ist stets ein Homöomorphismus (wenn man nicht zwei verschiedene Topologien benutzt...). Eine konstante Abbildung ist immer stetig.
- b) Die Verknüpfung zweier stetiger Abbildungen $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ ist wieder stetig.

Insbesondere zeigt das, dass homöomorph zu sein eine Äquivalenzrelation auf jeder Menge von topologischen Räumen ist.

- c) Die Produkttopologie auf $Y \times Z$ ist die feinste Topologie auf $Y \times Z$ mit der folgenden Eigenschaft:

Sind $f : X \rightarrow Y$ und $g : X \rightarrow Z$ stetig, so ist auch $f \times g : X \rightarrow Y \times Z$ stetig.

- d) $\mathcal{C}(X)$ ist wieder der Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf X (wobei \mathbb{R} bei so etwas immer mit der Standardtopologie versehen ist!). Dies ist wieder ein Ring (bezüglich der üblichen Verknüpfungen), denn die Addition und Multiplikation sind stetige Abbildungen von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R} , und wir können b) und c) anwenden.

Wir sehen als nächstes die topologischen Formulierungen einiger Sätze aus der Analysis.

Proposition 3.3.5 Ein Erhaltungssatz

Es sei $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann gelten:

- a) *Wenn X kompakt ist, dann auch $f(X)$.*
- b) *Wenn X zusammenhängend ist, dann auch $f(X)$.*
- c) *Wenn Y hausdorffsch ist und f injektiv, dann ist X hausdorffsch.*

Beweis.

- a) Es sei \ddot{V} eine offene Überdeckung von $f(X)$ in Y . Dann ist $\ddot{U} := \{f^{-1}(V) \mid V \in \ddot{V}\}$ eine offene Überdeckung von X . Da X kompakt ist, gibt es endlich viele $V_1, \dots, V_n \in \ddot{V}$, sodass bereits $\{f^{-1}(V_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ eine Überdeckung von X ist.

Aus $f(f^{-1}(V_i)) = f(X) \cap V_i$ folgt, dass $\{V_1, \dots, V_n\}$ das Bild von f überdecken.

- b) Es sei $f(X) = A \cup B$ eine disjunkte Zerlegung von $f(X)$ in nicht leere Teilmengen. Wenn A, B in der Spurtopologie offen wären, dann gäbe es offene Teilmengen V, W von Y mit $A = V \cap f(X), B = W \cap f(X)$.

Mithin wäre $f^{-1}(V), f^{-1}(W)$ eine offene Überdeckung von X , die noch dazu disjunkt ist, da sich V und W nicht in $f(X)$ schneiden.

Andererseits wären diese Teilmengen von X nicht leer (weil A und B nicht leer sind), und das widerspricht der Definition von Zusammenhang.

- c) Es seien $x_1 \neq x_2$ Punkte in X . Dann sind ihre Bilder in Y verschieden, denn f soll injektiv sein. Daher haben $f(x_1), f(x_2)$ in Y disjunkte Umgebungen, und deren Urbilder sind disjunkte Umgebungen von x_1 und x_2 .

○

Die Umkehrungen gelten jeweils natürlich nicht, wie einfache Gegenbeispiele lehren. Aber wir treffen bei näherem Hinsehen

Folgerung 3.3.6 alte Bekannte

Es sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

- a) Wenn X kompakt ist, dann nimmt f ein Maximum und ein Minimum an.

Als Spezialfall hiervon erinnern wir an 2.3.5: eine Norm N auf dem \mathbb{R}^n ist immer stetig bezüglich der Standardmetrik. Daher nimmt sie auf der (kompakten) Einheitssphäre ein positives Minimum m und ein Maximum M an, und das führt wegen der Homogenität der Norm zu

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : m|x| \leq N(x) \leq M|x|.$$

Dies zeigt, dass N und die Standardmetrik dieselbe Topologie liefern.

- b) Wenn $X \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, dann ist auch $f(X)$ ein Intervall – das ist der Zwischenwertsatz.

- c) Wir sehen mit dem letzten Hilfssatz auch, dass $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ tatsächlich kompakt ist, wie es in 3.2.5 schon gesagt worden war. Tatsächlich ist ja $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ das Bild von $\mathbb{S}^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |v| = 1\}$ unter der kanonischen Projektion $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Analog lässt sich für $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ argumentieren.

- d) Es sei X ein topologischer Raum, Y ein Hausdorffraum und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ eine Teilmenge, die die Punkte trennt, d.h. für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es ein $f \in \mathcal{A}$, sodass $f(x) \neq f(y)$.

Dann ist X hausdorffsch. Denn: Für je zwei $x \neq y$ in X wählen wir uns so ein $f \in \mathcal{A}$, das x und y trennt. Dann haben $f(x)$ und $f(y)$ in Y disjunkte Umgebungen, und deren Urbilder unter f sind dann auch disjunkt.

Satz 3.3.7 von Dini⁴

Es seien X ein kompakter topologischer Raum, Y ein metrischer Raum und $(f_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{C}(X, Y)$, die punktweise gegen eine Abbildung $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ konvergiert. Weiterhin gelte für alle $x \in X, n \in \mathbb{N}$:

$$d(f_{n+1}(x), f(x)) \leq d(f_n(x), f(x)).$$

Dann ist die Konvergenz gleichmäßig.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Für jedes $x \in X$ gibt es ein $n(x) \in \mathbb{N}$, sodass für $m \geq n(x)$ gilt:

$$d(f_m(x), f(x)) \leq \varepsilon/3.$$

Da $f_{n(x)}$ und f stetig sind, gibt es eine offene Umgebung U_x von x , sodass

$$\forall y \in U_x : d(f_{n(x)}(x), f_{n(x)}(y)), \quad d(f(x), f(y)) < \varepsilon/3.$$

Das impliziert wegen der Dreiecksungleichung für alle $y \in U_x$:

$$d(f_{n(x)}(y), f(y)) < \varepsilon.$$

Aus $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ folgt wegen der Kompaktheit von X die Existenz von Punkten $x_1, \dots, x_k \in X$ mit

$$X = \bigcup_{i=1}^k U_{x_i}.$$

Es sei $N = \max_{1 \leq i \leq k} n(x_i)$. Dann gilt für jedes $m \geq N$ und jedes $y \in X$: es gibt ein i mit $y \in U_{x_i}$, und daher wegen der Zusatzeigenschaft über die Konvergenz der Folge (f_n) :

$$d(f_m(y), f(y)) \leq d(f_{n(x_i)}(y), f(y)) < \varepsilon.$$

○

⁴Ulisse Dini, 1845-1918

Satz 3.3.8 von Stone⁵-Weierstraß⁶

Es sei K ein kompakter topologischer Raum und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(K)$ ein Teilring, der die konstanten Funktionen enthält und die Punkte von K trennt.

Dann ist \mathcal{A} dicht in $\mathcal{C}(K)$.

Beweis des Satzes. Hier folge ich den Grundzügen der modernen Analysis von Dieudonné⁷.

Wir bezeichnen mit $\overline{\mathcal{A}}$ den Abschluss von \mathcal{A} in $\mathcal{C}(K)$.

Wir führen den Beweis des Satzes in mehreren Schritten.

1. Es gibt eine Folge von reellen Polynomen $u_n \in \mathbb{R}[X]$, die auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichmäßig gegen die Wurzelfunktion konvergiert.

Um dies einzusehen setzen wir $u_1 \equiv 0$ und definieren rekursiv⁸

$$u_{n+1}(t) := u_n(t) + \frac{1}{2}(t - u_n(t)^2), n \geq 1.$$

Dann ist (u_n) punktweise monoton steigend (auf $[0, 1]$ wohlgermerkt, nur dort betrachten wir das) und beschränkt. Punktweise gilt also (wegen des Monotoniekriteriums und weil \sqrt{t} der einzige positive Fixpunkt der Funktion $x \mapsto x + \frac{1}{2}(t - x^2)$ ist) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = \sqrt{t}$. Dann impliziert der Satz von Dini die gleichmäßige Konvergenz.

2. Für jedes $f \in \mathcal{A}$ gehört $|f|$ zu $\overline{\mathcal{A}}$.

Denn für $a := \max_{x \in K} |f(x)|$ ist $a \cdot (u_n(f^2/a^2))$ (mit u_n aus Punkt 1.) eine Folge in \mathcal{A} , die gegen $|f|$ konvergiert.

3. Für $x \neq y \in K$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) = a, f(y) = b$.

Denn: Es gibt ja nach Voraussetzung in \mathcal{A} eine Funktion g mit $g(x) \neq g(y)$. Definiere nun $f \in \mathcal{A}$ durch

$$f(t) := \frac{a}{g(x) - g(y)}(g(t) - g(y)) + \frac{b}{g(y) - g(x)}(g(t) - g(x)).$$

NB: x, y sind fest, die Variable ist t .

4. Für jedes $f \in \mathcal{C}(K)$, jedes $x \in K$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Funktion $g \in \overline{\mathcal{A}}$ derart, dass

$$g(x) = f(x), \quad \forall y \in K : g(y) \leq f(y) + \varepsilon.$$

⁵Marshall Harvey Stone, 1903-1989

⁶Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815-1897

⁷Jean Alexandre Eugène Dieudonné, 1906-1992

⁸Das hat schon Heron von Alexandria so etwa 150 v.Chr. gemacht.

Zunächst gibt es wegen 3. für jedes $z \in K$ eine Hilfsfunktion $h_z \in \mathcal{A}$, sodass $h_z(x) = f(x)$, $h_z(z) \leq f(z) + \frac{\varepsilon}{2}$. Da h_z stetig ist, gibt es eine Umgebung U_z von z , in der

$$h_z(y) \leq f(y) + \varepsilon, \quad y \in U_z$$

gilt. Da K kompakt ist, wird es von endlich vielen der U_z überdeckt, es gibt also $z_1, \dots, z_n \in K : K = \cup_i U_{z_i}$.

Setze nun $g(y) := \inf_i h_{z_i}(y)$. Diese Funktion liegt wegen $\inf(p, q) = \frac{1}{2}(p + q - |p - q|)$ in $\overline{\mathcal{A}}$ und hat die gewünschte Eigenschaft.

5. $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(K)$.

Es sei $f \in \mathcal{C}(K)$ und $\varepsilon > 0$. Für jedes $x \in K$ gibt es eine Funktion $h_x \in \mathcal{A}$ mit

$$h_x(x) = f(x), \quad \forall y \in K : h_x(y) \leq f(y) + \varepsilon.$$

Die Stetigkeit von h_x zeigt, dass jedes $x \in K$ eine offene Umgebung V_x hat mit

$$\forall y \in V_x : h_x(y) \geq f(y) - \varepsilon.$$

Ähnlich wie in 4. gibt es $x_1, \dots, x_r \in K$, sodass K von den V_x überdeckt wird. Auch ähnlich wie eben liegt das Supremum g der Funktionen h_{x_i} , $1 \leq i \leq r$, in $\overline{\mathcal{A}}$, und es gilt

$$\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Das ist die Behauptung. ○

Bemerkung 3.3.9 Fourierreihen⁹

- a) Eine Anwendung des Satzes von Stone und Weierstraß ist natürlich die klassische Formulierung des Satzes, dass nämlich auf einem Kompaktum $K \subseteq \mathbb{R}^n$ jede stetige Funktion gleichmäßig durch Polynomfunktionen (in n Veränderlichen) approximiert werden kann.
- b) Eine stetige Funktion auf \mathbb{R}/\mathbb{Z} ist „nichts anderes“ als eine stetige Funktion auf \mathbb{R} , die periodisch mit Periode 1 ist. Das kommt von der stetigen natürlichen Projektion von \mathbb{R} auf \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Nun betrachten wir die stetigen periodischen Funktionen $\sin(2\pi kx)$, $\cos(2\pi lx)$, wobei $k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}_0$. Die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus sagen, dass die Menge

$$\mathcal{A} := \left\{ \sum_{k=1}^n a_k \sin(2\pi kx) + \sum_{l=0}^n b_l \cos(2\pi lx) \mid n \in \mathbb{N}, a_k, b_l \in \mathbb{R} \right\}$$

⁹Jean-Baptiste-Joseph de Fourier, 1768-1830

ein Teilring von $\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ ist. Dieser Ring enthält die konstanten Funktionen und trennt die Punkte, denn für $0 \leq x \leq y < 1$ folgt aus $\sin(2\pi x) = \sin(2\pi y)$ und $\cos(2\pi x) = \cos(2\pi y)$, dass $x = y$ ist.

Also sagt Stone-Weierstraß, dass \mathcal{A} in $\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ dicht liegt, denn \mathbb{R}/\mathbb{Z} ist kompakt.

Auf diesem Raum gibt es auch ein natürliches Skalarprodukt:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Den Abstand bezüglich dieses Skalarprodukts nennen wir d_2 . Offensichtlich gilt $d_2(f, g) \leq d(f, g)$, wobei d die von uns immer benutzte Norm der gleichmäßigen Konvergenz ist.

Es sei f eine stetige Funktion auf \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Weiter sei $\varepsilon > 0$ und $g \in \mathcal{A}$ eine Funktion mit $d(f, g) < \varepsilon$. Wir schreiben $g = \sum_{k=1}^n a_k \sin(2\pi kx) + \sum_{l=0}^n b_l \cos(2\pi lx)$ mit einem geeigneten n und wollen nun f auf dem Raum \mathcal{A}_n aller Funktionen „mit festem n “ möglichst gut approximieren. Das geht bezüglich der d_2 -Metrik besser als bezüglich der ∞ -Metrik, denn nun haben wir das ganze Spektrum der Linearen Algebra zur Verfügung.

Die Funktionen

$$s_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2\pi kx), c_l(x) := \begin{cases} 1, & l = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(2\pi lx), & l \neq 0, \end{cases}$$

bilden für $1 \leq k \leq n, 0 \leq l \leq n$ eine Orthonormalbasis von \mathcal{A}_n .

Daher hat

$$F_n := \sum_{k=1}^n \langle f, s_k \rangle s_k + \sum_{l=0}^n \langle f, c_l \rangle c_l$$

in \mathcal{A}_n minimalen d_2 -Abstand zu f , und im Sinne der d_2 -Konvergenz gilt $f = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$.

Vorsicht: Die Folge F_n muss jetzt nicht mehr gleichmäßig gegen f konvergieren. Das ist gemein, aber es ist halt so.

- c) Der Satz von Stone und Weierstraß spielt auch in der Darstellungstheorie kompakter Gruppen eine große Rolle, da er für den Beweis des Satzes von Peter¹⁰ und Weyl¹¹ grundlegend ist. Dieser hinwiederum liefert eine Übersicht über alle irreduziblen Darstellungen einer gegebenen kompakten Gruppe K , wie etwa $SO(n)$ oder $U(n)$.

¹⁰F. Peter; von ihm fehlen mir augenblicklich die Daten; der Satz wurde 1927 publiziert. Angeblich wurde Weyl von seinen Freunden Peter genannt, aber das hat nichts mit diesem Peter zu tun.

¹¹Hermann Weyl, 1885-1955

Das wiederum spielt in der Teilchenphysik oder in der Elektrodynamik seinen Part beim Lösen von Differentialgleichungen mit kompakter Symmetriegruppe. Man denke etwa an das Spektrum des Wasserstoffatoms. Die hierbei auftretenden Kugelflächenfunktionen lassen sich gut mithilfe der Darstellungstheorie der orthogonalen Gruppe verstehen.

Definition 3.3.10 Wo ein Weg ist...

Eine besonders wichtige Klasse von stetigen Abbildungen ist die der Wege.

Es sei X ein topologischer Raum. Ein *Weg* ist eine stetige Abbildung eines kompakten reellen Intervalls $[a, b]$ mit $a < b$ nach X .

Sind $f : [a, b] \rightarrow X$ und $g : [b, c] \rightarrow X$ zwei Wege mit $f(b) = g(b)$, so ist $g * f : [a, c] \rightarrow X$ ein Weg, wenn wir

$$g * f(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [a, b] \\ g(t), & t \in [b, c] \end{cases}$$

definieren.

Diese Verknüpfung ist assoziativ, aber nicht für beliebige Wege definiert. Wir werden später auf diese Verknüpfung noch näher eingehen und sie modifizieren.

Zwei Wege $f : [a, b] \rightarrow X$, $g : [c, d] \rightarrow X$, heißen *äquivalent*, falls es einen Homöomorphismus $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$ gibt mit

$$f = g \circ h.$$

Oftmals interessiert man sich ja auch nur für die Bildmenge eines Weges, und nicht für eine konkrete Parametrisierung durch die Abbildung f , und dies wird hier durch die „Umparametrisierung“ h zum Ausdruck gebracht.

X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es für alle $x, y \in X$ einen Weg f mit $f(a) = x$, $f(b) = y$ gibt.

Ein wegzusammenhängender Raum ist zusammenhängend. Denn je zwei Punkte liegen als Anfangspunkt und Endpunkt im Bild eines Weges, also in einer Zusammenhangskomponente, denn das Bild eines Weges ist zusammenhängend. Daher gibt es nur diese eine Komponente.

Allerdings ist nicht jeder zusammenhängende Raum automatisch wegzusammenhängend.

Zur Übung jedoch sollte man sich überlegen, dass eine offene zusammenhängende Teilmenge des \mathbb{R}^n immer wegzusammenhängend ist.

Konstruktion 3.3.11 Die Konstruktion einer Peanokurve

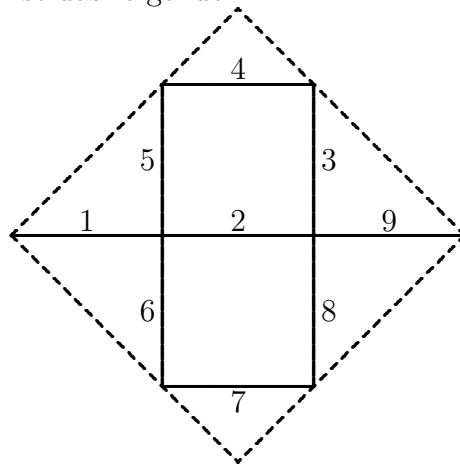
Da man beim Begriff Kurve gleich an etwas schönes ohne Ecken und Kanten denkt, soll hier ein Beispiel einer nicht ganz so schönen Kurve gegeben werden.

Wir konstruieren dazu eine stetige surjektive Abbildung vom Intervall $\mathbb{I} := [0, 1]$ in das Quadrat $Q \subseteq \mathbb{C}$ mit den Eckpunkten $0, 1$ und $\frac{1}{2}(1 \pm i)$.

Wir starten mit der Kurve $\alpha_0 : [0, 1] \rightarrow Q, \alpha_0(t) = t$. Diese verwenden wir, um rekursiv eine Folge von Kurven zu definieren:

$$\alpha_{n+1}(t) = \frac{1}{3} \cdot \begin{cases} \alpha_n(9t), & \text{wenn } 0 \leq t < 1/9, \\ 1 + \alpha_n(9t - 1), & \text{wenn } 1/9 \leq t < 2/9, \\ 2 + i\alpha_n(9t - 2), & \text{wenn } 2/9 \leq t < 3/9, \\ 2 + i - \alpha_n(9t - 3), & \text{wenn } 3/9 \leq t < 4/9, \\ 1 + i - i\alpha_n(9t - 4), & \text{wenn } 4/9 \leq t < 5/9, \\ 1 - i\alpha_n(9t - 5), & \text{wenn } 5/9 \leq t < 6/9, \\ 1 - i + \alpha_n(9t - 6), & \text{wenn } 6/9 \leq t < 7/9, \\ 2 - i + i\alpha_n(9t - 7), & \text{wenn } 7/9 \leq t < 8/9, \\ 2 + \alpha_n(9t - 8), & \text{wenn } 8/9 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Das Bild der Kurve α_1 ist das folgende:



Daraus entsteht das Bild der Kurve α_2 , indem jede der neun durchgezogenen Strecken der Länge $\frac{1}{3}$ durch eine verkleinerte Kopie des Bildes von α_1 ersetzt wird usw.

Dem Konstruktionsprozess sieht man an, dass die Folge der Kurven α_n gleichmäßig konvergiert, ihr Limes α also existiert und wieder stetig ist. Außerdem ist klar, dass für $m \geq n$ und natürliches $a \leq 9^n$ gilt: $\alpha_m(a/9^n) = \alpha_n(a/9^n)$. Schließlich ist im Bild von jedem α_m für $m \geq n$ die Menge aller Punkte aus Q enthalten, die als Real- oder Imaginärteil eine rationale Zahl haben, deren Nenner (nach Kürzen) ein Teiler von 3^n ist.

Das Bild von α ist damit in Q enthalten und enthält die Menge aller Punkte aus Q , die als Real- oder Imaginärteil eine rationale Zahl haben, deren Nenner (nach Kürzen) eine Potenz von 3 ist. Diese Menge ist dicht in Q , und folglich ist α , da sein Bild kompakt sein muss, auch surjektiv.

Jedoch kann α nicht injektiv sein, denn sonst wäre es eine stetige Bijektion mit

Q . Die Umkehrabbildung wäre dann auch stetig, da das Bild einer abgeschlossenen Teilmenge von \mathbb{I} kompakt ist. \mathbb{I} und Q wären also homöomorph, und das stimmte dann auch für $\mathbb{I} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ und $Q \setminus \{\alpha(\frac{1}{2})\}$, was nicht sein kann, denn das zweite ist zusammenhängend, das erste nicht.

Definition 3.3.12 Offenheit

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen zwei topologischen Räumen heißt *offen*, wenn für jede offene Teilmenge $A \subseteq X$ das Bild $f(A)$ in Y offen ist.

f heißt *offen in* $x \in X$, falls jede Umgebung von x unter f auf eine Umgebung von $f(x)$ abgebildet wird.

Insbesondere ist ein Homöomorphismus also eine stetige und offene Bijektion.

Für jede natürliche Zahl k ist auf der Menge der komplexen Zahlen die Abbildung $z \mapsto z^k$ eine stetige, offene und surjektive Abbildung, wie in der Beschreibung durch Polarkoordinaten ersichtlich ist. Sie ist jedoch nicht bijektiv für $k > 1$. Allgemein zeigt man in der Funktionentheorie, dass ein nicht konstantes Polynom auf \mathbb{C} offen ist. Das ist im reellen ganz anders, wie man an $x \mapsto x^2$ sieht. Im Komplexen ist es eine topologische Grundlage für den Fundamentalsatz der Algebra.

Satz 3.3.13 à la Liouville¹²

Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige und offene Abbildung, X sei nichtleer und kompakt, Y sei zusammenhängend und hausdorffsch.

Dann ist f surjektiv und insbesondere ist Y auch kompakt.

Beweis. Das Bild von f ist offen nach Definition der Offenheit und kompakt wegen 3.3.5. Als Kompaktum in Y ist $f(X)$ abgeschlossen, siehe 3.2.11. Es ist mithin $Y = f(X) \cup (Y \setminus f(X))$ eine Zerlegung von Y als Vereinigung zweier offener disjunkter Teilmengen. Da $f(X)$ nicht leer ist und Y zusammenhängend ist, muss $Y \setminus f(X)$ leer sein: f ist surjektiv. \circ

Satz 3.3.14 Fundamentalsatz der Algebra

Es sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ein nichtkonstantes Polynom.

Dann besitzt f eine komplexe Nullstelle.

Beweis. Wie vorhin bemerkt (aber das zu zeigen ist halbwegs aufwendig!) ist f offen. Außerdem gilt (siehe 1.2.1), dass $|f(z)|$ mit $|z|$ gegen unendlich geht.

Wir können demnach f zu einer stetigen Abbildung \hat{f} von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auf sich selbst fortsetzen, indem wir $\hat{f}(\infty) = \infty$ setzen. Man verifiziert, dass auch \hat{f}

¹²Joseph Liouville, 1809-1882

offen ist. Sie ist wegen Liouville also auch surjektiv, und es gibt ein $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ mit $\hat{f}(z) = 0$. Da z nicht ∞ sein kann (hier wird \hat{f} ja unendlich) ist $z \in \mathbb{C}$ wie behauptet. \circ

Definition/Bemerkung 3.3.15 Jordankurven

Eine *Jordankurve* in \mathbb{R}^2 ist entweder ein Homöomorphismus von $\mathbb{I} = [0, 1]$ auf eine Teilmenge von \mathbb{R}^2 oder ein Homöomorphismus des Einheitskreises \mathbb{S}^1 auf eine Teilmenge von \mathbb{R}^2 .

Anders gesagt: Eine stetige und injektive Abbildung von \mathbb{I} bzw. \mathbb{S}^1 nach \mathbb{R}^2 . Das Bild C davon ist dann auch kompakt, und wegen der Injektivität ist die Abbildung offen, also ein Homöomorphismus auf C .

Oft nennt man auch das Bild der Abbildung eine Jordankurve. Im ersten Fall heißt sie *nicht geschlossen*, im zweiten Fall *geschlossen*.

Kapitel 4

Mannigfaltigkeiten

4.1 Atlanten

Definition 4.1.1 Atlas

Es sei X ein topologischer Raum. Ein n -dimensionaler *Atlas* auf X besteht aus einer offenen Überdeckung \tilde{U} von X zusammen mit einer Wahl von Homöomorphismen

$$\varphi_U : U \longrightarrow Z(U) \subseteq \mathbb{R}^n,$$

wobei U die Überdeckung \tilde{U} durchläuft und $Z(U)$ in \mathbb{R}^n offen ist.

Streng genommen müsste man $Z(U)$ auch noch von φ_U abhängig machen und sich dadurch die Möglichkeit verschaffen, für ein U ganz viele Homöomorphismen auf offene Teilmengen von \mathbb{R}^n zu benutzen. Das läuft auf eine Indexschlacht hinaus, die den Blick aufs Wesentliche verschleiert.

Zum Beispiel besitzt jede offene Teilmenge U des \mathbb{R}^n einen Atlas; wir nehmen einfach $\{U\}$ als Überdeckung und die Identität als Kartenabbildung.

Vorsicht: Wir halten im Vorübergehen fest, dass es nicht *a priori* klar ist, dass die Dimension eines Atlas durch die Topologie auf X festliegt. Das ist so, aber der Beweis ist nicht so offensichtlich. Schließlich muss man so etwas zeigen, wie dass es für $m \neq n$ keine offene stetige Abbildung einer m -dimensionalen Kugel in eine n -dimensionale gibt.

Definition/Bemerkung 4.1.2 Kartenwechsel

Es sei X ein topologischer Raum mit einem n -dimensionalen Atlas. Wenn zwei Karten

$$\varphi_U : U \longrightarrow Z(U), \quad \varphi_V : V \longrightarrow Z(V)$$

auf offenen Mengen mit nichtleerem Schnitt gegeben sind, dann liefert das natürlich insbesondere einen Homöomorphismus

$$\psi_{U,V} : \varphi_U(U \cap V) \longrightarrow \varphi_V(U \cap V),$$

indem wir erst mit φ_U^{-1} zurückgehen und dann mit φ_V „absteigen“.

Diese Abbildungen $\psi_{U,V}$ heißen die *Kartenwechsel* des Atlanten.

Definition 4.1.3 topologische Mannigfaltigkeit

Ein topologischer Raum X ist eine n -dimensionale *topologische Mannigfaltigkeit*, wenn er hausdorffsch ist, mit einem n -dimensionalen Atlas ausgerüstet werden kann und eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.

Beispiel 4.1.4 Anfängliche Enttäuschung

Eine eindimensionale Mannigfaltigkeit heißt auch eine *Kurve*.

Jede zusammenhängende Kurve ist entweder nicht kompakt und dann zu \mathbb{R} homöomorph oder kompakt und zum Einheitskreis homöomorph.

Da gibt es also nicht so arg viele. Dafür gibt es eine befriedigende Klassifikation, ein Faktum, nach dem man sich spätestens ab Dimension 3 zurücksehen wird.

Woran liegt diese Spärlichkeit?

Bemerkung 4.1.5 Abzählbarkeitsaxiome

Die letzte Bedingung aus der Definition ermöglicht einige Konstruktionen mit topologischen Mannigfaltigkeiten, die sich als sehr hilfreich erweisen. Sie impliziert zum Beispiel, dass jede offene Überdeckung von X eine abzählbare Teilüberdeckung hat.

Man nennt sie auch das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*.

Der Name schreit nach einem Vorgänger: Ein topologischer Raum erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom*, wenn jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Metrische Räume haben diese Eigenschaft zum Beispiel, sie ist eine **lokale** Bedingung, sagt sie doch nur etwas über Umgebungen von einem jeden Punkt aus. Das werden wir im nächsten Hilfssatz einmal austesten.

Wenn es eine abzählbare Umgebungsbasis von x gibt, so gibt es auch eine der Gestalt

$$U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \dots$$

Das sieht man durch sukzessive Schnittbildung einer gegebenen abgezählten Umgebungsbasis.

Das zweite Abzählbarkeitsaxiom impliziert offensichtlich das erste.

Definition 4.1.6 Folgenkompaktheit

Eine Folge (x_n) in einem topologischen Raum X *konvergiert gegen* $x \in X$, falls in jeder Umgebung von x alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen.

Vorsicht: Der Grenzwert ist im Allgemeinen nicht mehr eindeutig, also eigentlich der bestimmte Artikel verboten. Für die Eindeutigkeit des Grenzwerts braucht man ein Trennungsaxiom, zum Beispiel ist hausdorffsch hinreichend.

X heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt.

Hilfssatz 4.1.7 Folgen für die Folgenkompaktheit

Es sei X ein topologischer Raum.

- a) *Ist X kompakt und erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, so ist X folgenkompakt.*
- b) *Ist X folgenkompakt und metrisch, so ist X auch kompakt.*

Beweis.

- a) Es sei (x_n) eine Folge in X . Dann gibt es ein $x \in X$, sodass in jeder Umgebung U von x für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ der Punkt x_n liegt.

Anderenfalls ließe sich für alle $x \in X$ eine Umgebung U_x finden, die nur endlich viele Folgenglieder enthält, und weil

$$X = \bigcup_{x \in X} U_x$$

eine endliche Teilüberdeckung hat, hätte man einen Widerspruch.

Nun haben wir so ein x . Dieses besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis

$$U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3, \dots$$

und wir können bequem eine Teilfolge x_{n_k} wählen mit

$$\forall k \in \mathbb{N} : n_{k+1} > n_k \quad \text{und} \quad x_{n_k} \in U_k.$$

- b) Es sei \ddot{U} eine offene Überdeckung des folgenkompakten metrischen Raums X .

Für jedes $x \in X$ wählen wir ein $U_x \in \ddot{U}$ derart, dass eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$B_1(x) \subseteq U_x \quad \text{oder} \quad \exists r(x) > 0 : B_{r(x)}(x) \subseteq U_x, \forall U \in \ddot{U} : B_{2r(x)}(x) \not\subseteq U.$$

Jetzt nehmen wir an, dass \ddot{U} keine endliche Teilüberdeckung besitze. Wir starten mit einem beliebigen $x_1 \in X$ und wählen

$$x_2 \in X \setminus U_{x_1}, \quad x_3 \in X \setminus (U_{x_1} \cup U_{x_2}), \dots$$

Da X folgenkompakt ist, gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) , die gegen ein $a \in X$ konvergiert. Wir wählen ein $r \in (0, 1)$ derart, dass $B_r(a) \subseteq U_a$. Dann liegt x_{n_k} für großes k in $B_{r/5}(a)$, und es gilt

$$d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < 2r/5.$$

Andererseits zeigt

$$x_{n_k} \in B_{4r/5}(x_{n_k}) \subseteq B_r(a) \subseteq U_a \in \ddot{U},$$

dass $r(x_{n_k}) \geq 2r/5$, und damit auch

$$d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \geq 2r/5.$$

Dieser Widerspruch besiegelt das Schicksal unserer irrigen Annahme, \ddot{U} habe keine endliche Teilüberdeckung.

Also ist X kompakt, da \ddot{U} beliebig war. ○

Beispiel 4.1.8 Schönheiten des Abendlandes

Nach diesem Grundlagenexkurs kehren wir nun zu den topologischen Mannigfaltigkeiten zurück. Wir kennen noch keine Beispiele. Oder doch?

- a) Jede offene, nichtleere Teilmenge von \mathbb{R}^n ist eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Hier muss man vor allem das zweite Abzählbarkeitsaxiom testen. **Tun Sie das!**

Jeder Hausdorffraum mit einem endlichen Atlas ist dann auch eine topologische Mannigfaltigkeit.

- b) Es sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und

$$X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}.$$

Das ist ein abgeschlossener Teilraum von \mathbb{R}^n , im allgemeinen aber keine Mannigfaltigkeit.

Sei nun OBdA $0 \in X$. Wenn $\frac{dF}{dx_1}(0) \neq 0$ gilt, dann sagt der Satz von der impliziten Funktion, dass es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ der 0 gibt und eine differenzierbare Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(0) = 0$ sodass

$$G : U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad u \mapsto (g(u), u),$$

eine stetige und offene Bijektion von U mit einer offenen Umgebung von 0 in X ist.

Allgemeiner heißt das: Wenn der Gradient $\text{grad}(F)$ in keinem Punkt $x \in X$ verschwindet, dann kann man für jeden Punkt $x \in X$ lokal die Menge X parametrisieren durch eine bistetige Bijektion mit einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^{n-1} . Das liefert einen $(n-1)$ -dimensionalen Atlas, und man kann verifizieren, dass ein abzählbarer Atlas langt.

Anders gesagt: Wenn der Gradient von F auf X keine Nullstelle hat, dann ist X eine $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Konkret zum Beispiel: Die Sphäre vom Radius 1 um den Nullpunkt im \mathbb{R}^n .

- c) Es sei $K = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} . Dann ist der projektive Raum $\mathbb{P}^n(K)$ mit der früher eingeführten Quotiententopologie eine topologische Mannigfaltigkeit.

Denn er lässt sich überdecken durch die Bilder der Mengen

$$U_k := \{(x_i)_{1 \leq i \leq n+1} \mid x_k = 1\}, \quad 1 \leq k \leq n+1,$$

die jeweils homöomorph zu \mathbb{R}^n sind. Diese werden beim Quotientenbilden mit ihrem Bild auch topologisch identifiziert, liefern also einen endlichen Atlas von $\mathbb{P}^n(K)$.

- d) Das Produkt einer m - und einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit ist eine $(m+n)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.
- e) Keine topologische Mannigfaltigkeit ist zum Beispiel der folgende Raum, obwohl er einen endlichen Atlas hat: Wir nehmen den Einheitskreis $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ und definieren $X = \mathbb{S}^1 / \simeq$, wobei die Äquivalenzrelation \simeq durch $x \simeq -x$ für $x \neq \pm 1$ definiert ist.

Ein offener Halbkreis wird hierbei injektiv nach X abgebildet, und wir erhalten einen schönen Atlas, von dem sogar zwei Karten genügen. Aber X ist nicht hausdorffsch, weil die Klassen von ± 1 sich nicht durch offene Umgebungen trennen lassen.

Bemerkung 4.1.9 Feinere Strukturen

- a) Wenn wir von den Kartenwechseln (siehe 4.1.2) des Atlanten verlangen, dass sie differenzierbar sind, so können wir unter Rückgriff auf den Atlas definieren, wann eine reellwertige Funktion f auf M differenzierbar ist. Das ist sie nämlich genau dann, wenn für alle Karten gilt, dass

$$f \circ \varphi_U^{-1}$$

auf $Z(U)$ differenzierbar ist. Dies ist dann eine konsistente Bedingung, wenn die Kartenwechsel differenzierbar sind, und die Differenzierbarkeit in einem Punkt $x \in M$ kann durch Blick auf eine einzige Karte getestet werden.

Vorsicht: Es ist nicht klar, was dann die Ableitung einer differenzierbaren Funktion auf M ist, denn der Funktionswert der Ableitung hängt von der benutzten Karte ab. Man muss deshalb ein neues Auffangbecken einrichten, um die Ableitung als eigenständiges Objekt zu verstehen. Hierfür erfindet man den Begriff der Differentialform, aber das soll hier nicht weiter behandelt werden.

Wenn die Kartenwechsel d -fach differenzierbar sind, so kann man auch sagen, wann eine Funktion d -fach differenzierbar ist. Und hier kann d auch ∞ sein.

So kommt man zum Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeit, dem Hauptgegenstand der Differentialtopologie.

- b) Wenn die Kartenwechsel differenzierbar sind und ihre Ableitungen Isometrien der Tangentialräume sind (das ist jetzt ein wenig vage formuliert), kann man dies benutzen, um zum Beispiel Längen von differenzierbaren Kurven in M zu definieren. Wenn M zusammenhängend ist, führt dies letztlich zu einer Metrik auf M , und man nennt M dann eine Riemann'sche¹ Mannigfaltigkeit. Dies ist der Hauptgegenstand der Riemann'schen Geometrie.

Ein gutes Beispiel hierfür ist etwa die n -dimensionale Sphäre

$$\mathbb{S}^n := \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |v| = 1\}.$$

Hierauf gibt es zwei naheliegende Metriken. Die eine ist die Teilraummetrik, die vom umgebenden euklidischen Raum induziert wird. Diese ist allerdings eben vom umgebenden Raum abhängig, und nicht „intrinsisch“. Die andere kommt dadurch zustande, dass man zu je zwei Punkten das Infimum der Längen aller diese Punkte verbindenden (stückweise stetig differenzierbaren) Kurven in \mathbb{S}^n als Abstand zuordnet. Bei diesem Beispiel gibt es sogar kürzeste Verbindungen: das sind Abschnitte von Großkreisen.

4.2 Die Sätze von Urysohn und Tietze

Hilfssatz 4.2.1 M ist regulär

Es sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit und $x \in M$ ein Punkt.

Dann enthält jede offene Umgebung von x den Abschluss einer offenen Umgebung von x .

¹Bernhard Riemann, 1826-1866

Beweis. Es sei U eine offene Umgebung von x . Wir dürfen annehmen, dass U der Definitionsbereich einer Karte aus dem Atlas von M ist. Es sei $\varphi_U : U \rightarrow Z(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ die zugehörige Karte und ohne Einschränkung $\varphi_U(x) = 0$.

Weiter sei $r > 0$ gewählt, sodass $B_r(0) \subseteq Z(U)$ gilt: diese Menge ist ja offen. Dann liegt der Abschluss $A := \overline{B_{r/2}(0)}$ in $Z(U)$ und dies ist der Abschluss der Umgebung $B_{r/2}(0)$ von 0.

Das zeigt, dass $\varphi_U^{-1}(A) \subseteq U$ der Abschluss in U von einer Umgebung von x ist. Wir müssen noch überlegen, dass $\varphi_U^{-1}(A)$ tatsächlich auch in M abgeschlossen ist. Aber das liegt daran, dass $\varphi_U^{-1} : Z(U) \rightarrow U \subseteq M$ stetig ist, und daher den kompakten Abschluss $\overline{B_{r/2}(0)}$ auf ein kompaktes und daher abgeschlossenes Bild (wegen 3.2.11) abbildet. \circ

Definition 4.2.2 regulär, normal

Es sei X ein topologischer Raum, in dem die Punkte (d.h.: die einelementigen Teilmengen) abgeschlossen sind (ein sogenannter T_1 -Raum also).

Dann heißt X *regulär*, falls für jeden Punkt $x \in X$ jede Umgebung U von x den Abschluss einer offenen Umgebung von x enthält. (Diese Eigenschaft heißt T_3 .)

Das ist äquivalent dazu, dass für jeden Punkt $x \in X$ und jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ mit $x \notin A$ offene Mengen U, V existieren, sodass gilt:

$$x \in U, A \subseteq V, U \cap V = \emptyset.$$

Wir haben also im letzten Hilfssatz gezeigt, dass eine Mannigfaltigkeit regulär ist.

X heißt *normal*, falls es für je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen A, B in X disjunkte offene Mengen U, V gibt mit $A \subseteq U, B \subseteq V$. Man sagt auch: A und B haben disjunkte offene Umgebungen. (Diese Eigenschaft heißt T_4 .)

Es ist klar, dass normal regulär impliziert (denn Punkte sind abgeschlossen), und dass regulär hausdorffsch impliziert (dito).

Das sind einige Beispiele einer ganzen Familie sogenannter *Trennungssaxiome*, auf die hier aber nicht systematisch eingegangen wird.

Als nächstes wollen wir sehen, dass Mannigfaltigkeiten auch normal sind, und zeigen etwas allgemeiner:

Satz 4.2.3 Mannigfaltigkeiten sind normal

Es sei X ein regulärer topologischer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Dann ist X normal.

Beweis.

Es seien A, B zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X . Aufgrund der Regularität gibt es für jedes $a \in A$ eine Umgebung U_a , deren Abschluss zu B disjunkt ist. Wir überdecken A mit diesen U_a . Da das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist, gibt es eine abzählbare Überdeckung \ddot{U} von A , sodass alle $U \in \ddot{U}$ einen zu B disjunkten Abschluss haben. Dasselbe können wir auch für B machen: es gibt eine abzählbare offene Überdeckung \ddot{V} von B , sodass alle $V \in \ddot{V}$ einen zu A disjunkten Abschluss haben.

Nun wählen wir eine Abzählung von \ddot{U} und von \ddot{V} :

$$\ddot{U} = \{U_1, U_2, U_3, \dots\}, \quad \ddot{V} = \{V_1, V_2, V_3, \dots\}.$$

Nun definieren wir für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\tilde{U}_n := U_n \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{V_i} \quad \text{und} \quad \tilde{V}_n := V_n \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{U_i}.$$

Diese Mengen sind alle offen, und wir entnehmen nur Punkte, die nicht zu A beziehungsweise B gehören. Demnach sind

$$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{U}_n \quad \text{und} \quad B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{V}_n$$

offene und offensichtlich disjunkte Umgebungen von A und B . ○

Als nächstes wollen wir einen interessanten Existenzsatz über stetige Funktionen auf normalen topologischen Räumen – wie etwa Mannigfaltigkeiten – zeigen.

Satz 4.2.4 Existenzsatz von Urysohn²

Es seien X ein normaler topologischer Raum und $A, B \subseteq X$ zwei disjunkte, abgeschlossene Teilmengen.

Dann gibt es eine stetige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{I}$ die auf A konstant gleich 0 und auf B konstant gleich 1 ist.

Beweis. Natürlich dürfen wir A und B als nichtleer voraussetzen, sonst nehmen wir einfach eine konstante Funktion.

Wir konstruieren zunächst eine Familie von offenen Mengen, die durch die Zahlen

$$D := \{a/2^m \mid 0 \leq a \leq 2^m, a, m \in \mathbb{N}_0\}$$

parametrisiert werden und die Bedingung

$$\forall p, q \in D, p < q : \overline{U(p)} \subseteq U(q)$$

²Pawel Samuilowitsch Urysohn, 1898-1924

erfüllen und etwas mit A und B zu tun haben. Diese Definition geht rekursiv nach dem benötigten Exponenten bei der Zweierpotenz im Nenner.

Wir setzen $U(1) = U(1/2^0) := X \setminus B$ und wählen weiter zwei disjunkte Umgebungen U bzw. V von A bzw. B .

Der Abschluss von U ist dann immer noch disjunkt zu B , und wir setzen $U(0) = U(0/2^0) = U$.

Sind nun alle $U(a/2^n)$ für $n \leq N$ und alle erlaubten a definiert, so müssen wir $U(a/2^{N+1})$ für ungerade Zahlen $1 \leq a \leq 2^{N+1} - 1$ definieren.

Dazu wählen wir disjunkte offene Umgebungen U, V von $\overline{U((a-1)/2^{N+1})}$ und $X \setminus U((a+1)/2^{N+1})$, die es wegen der Disjunktheit und der Normalität von X gibt. Dann setzen wir $U(a/2^{N+1}) := U$.

Diese Mengen $U(p)$ tun offensichtlich das, was wir wollen. Wir benutzen sie nun, um f zu definieren. Wir setzen nämlich

$$\forall x \in X : f(x) := \begin{cases} \inf\{p \in D \mid x \in U(p)\}, & \text{falls } x \in U(1), \\ 1, & x \in B. \end{cases}$$

Auf $A \subseteq U(0)$ ist f 0, auf B ist es 1. Wir müssen die Stetigkeit von f zeigen.

Dazu sei $x \in X$ mit $f(x) = r \in [0, 1]$. Weiter sei $\varepsilon > 0$.

Für $r < 1$ wählen wir $d, e \in D$ mit

$$r - \varepsilon < d < r < e < r + \varepsilon.$$

Dann liegt x in $U(e)$, aber nicht in $\overline{U(d)}$, und damit ist $U(e) \setminus \overline{U(d)}$ eine offene Umgebung von x . Für $y \in U(e) \setminus \overline{U(d)}$ gilt offensichtlich

$$f(y) \in [d, e] \subseteq (r - \varepsilon, r + \varepsilon),$$

und daher ist f stetig in x .

Für $r = 1$ gilt ähnliches für

$$X \setminus \overline{U(d)}, \quad 1 - \varepsilon < d < 1,$$

und wir sind fertig. ○

Dieser Satz sagt also insbesondere, dass die Punkte eines normalen Raumes von den stetigen Funktionen getrennt werden – so wie wir es uns sicher vorstellen.

Satz 4.2.5 Erweiterungssatz von Tietze³

Es sei X ein normaler topologischer Raum. Weiter seien $A \subseteq X$ abgeschlossen und $f : A \rightarrow [-1, 1]$ eine stetige Funktion.

Dann lässt sich f zu einer stetigen Funktion $F : X \rightarrow [-1, 1]$ fortsetzen.

³Heinrich Franz Friedrich Tietze, 1880-1964

Das geht natürlich dann auch für jedes andere Intervall $[a, b]$ anstelle von $[-1, 1]$, aber der Beweis ist so etwas weniger notationslastig.

Beweis. Es sei

$$A_0 := \{a \in A \mid f(a) \leq -1/3\}, \quad A_1 := \{a \in A \mid f(a) \geq 1/3\}.$$

Das sind disjunkte, abgeschlossene Teilmengen von X (denn A ist abgeschlossen), und so finden wir eine stetige Funktion $F_1 : X \rightarrow [-1/3, 1/3]$, die auf A_0 den Wert $-1/3$ und auf A_1 den Wert $1/3$ annimmt.

Die Funktionswerte von $f - F_1$ liegen also zwischen $-2/3$ und $2/3$.

Wir definieren neue Mengen $A_0^{(2)}$ und $A_1^{(2)}$ durch

$$A_0^{(2)} := \{a \in A \mid f(a) - F_1(a) \leq -2/9\}, \quad A_1^{(2)} := \{a \in A \mid f(a) - F_1(a) \geq 2/9\}.$$

Dann gibt es eine Funktion F_2 auf X mit Werten in $[-2/9, 2/9]$, die auf $A_0^{(2)}$ den Wert $-2/9$ annimmt und auf $A_1^{(2)}$ den Wert $2/9$. Die Funktionswerte $(f(a) - F_1(a)) - F_2(a)$ liegen für $a \in A$ also alle zwischen $-4/9$ und $4/9$.

Wenn nun F_1, \dots, F_n sukzessive so definiert sind, dass auf A die Funktionen f und $F_1 + \dots + F_n$ sich betragsmäßig um höchstens $(\frac{2}{3})^n$ unterscheiden und F_i für $1 \leq i \leq n$ betragsmäßig nicht größer ist als $\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{i-1}$, so definieren wir

$$\begin{aligned} A_0^{(n)} &:= \{a \in A \mid f(a) - (F_1(a) + \dots + F_n(a)) \leq -2^{n-1}/3^n\}, \\ A_1^{(n)} &:= \{a \in A \mid f(a) - (F_1(a) + \dots + F_n(a)) \geq 2^{n-1}/3^n\}. \end{aligned}$$

Wie vorher gibt es eine stetige Funktion $F_{n+1} : X \rightarrow [-2^{n-1}/3^n, 2^{n-1}/3^n]$, die auf $A_0^{(n)}$ den linken und auf $A_1^{(n)}$ den rechten Randpunkt des Intervalls annimmt. Sie unterscheidet sich also von $f(a) - (F_1(a) + \dots + F_n(a))$ betragsmäßig um höchstens $(\frac{2}{3})^{n+1}$.

Damit stellen wir sicher, dass es eine nicht abbrechende Folge von Funktionen $F_i, i \in \mathbb{N}$, gibt, die die obigen Abschätzungen erfüllen.

Das zeigt, dass die Funktionenfolge $S_n := F_1 + \dots + F_n$ gleichmäßig konvergiert, der Limes mithin stetig ist, und dass sie auf A gegen f konvergiert. Außerdem sind die Funktionswerte der Limesfunktion wegen der geometrischen Reihe allesamt zwischen -1 und 1 . ○

Folgerung 4.2.6 Das Komplement einer nicht geschlossenen Jordankurve

Es sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine (nicht geschlossene) Jordankurve (siehe 3.3.15) mit Bild γ^* .

Dann ist $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma^*$ zusammenhängend.

Beweis. Da γ^* kompakt ist, gibt es ein $r > 0$, sodass γ^* in der Kreisscheibe $B_r(0)$ enthalten ist.

Da $\mathbb{R}^2 \setminus B_r(0)$ zusammenhängend und in $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma^*$ enthalten ist, gibt es nur eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma^*$. Wir nennen sie U . Nun müssen wir zeigen, dass jeder Punkt aus \mathbb{R}^2 zu γ^* oder zu U gehört. Es langt sogar zu zeigen, dass der Nullpunkt zu γ^* oder U gehört, da wir dies für alle Jordankurven zeigen. Ein Translationsargument führt den allgemeinen Fall auf diesen zurück.

Wir betrachten $\gamma^{-1} : \gamma^* \rightarrow [0, 1]$ und benutzen den Erweiterungssatz von Tietze, um diese Funktion zu einer stetigen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$$

fortzusetzen. $F := \gamma \circ f$ ist dann eine stetige Abbildung von \mathbb{R}^2 nach γ^* , die auf γ^* die Identität ist.

Da die Schnittpunkte aus $\mathbb{R}^2 \setminus U$ und dem Abschluss \bar{U} im Rand von U liegen und damit zu γ^* gehören müssen (andere Randpunkte kann U nicht haben; wieso?), wird durch

$$G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \begin{cases} F(x), & x \in \mathbb{R}^2 \setminus U, \\ x, & x \in \bar{U}, \end{cases}$$

eine (wohldefinierte) stetige Funktion festgelegt, die auf $\mathbb{R}^2 \setminus U$ nur Werte in $\gamma^* \subseteq B_r(0)$ annimmt und für alle anderen $x \in B_r(0)$ auch Werte in dieser Kreisscheibe, also ist die Einschränkung von G auf die Kreisscheibe eine Abbildung $g : B_r(0) \rightarrow B_r(0)$, die noch dazu auf dem Rand von $B_r(0)$ die Identität ist. Dies impliziert (wie wir in 5.1.5 sehen werden), dass g surjektiv ist, und damit liegt $0 \in B_r(0)$ in $\gamma^* \subseteq G(\bar{U})$ oder in $U = G(U)$.

Das beendet den Beweis. ○

Folgerung 4.2.7 Der Rand der Komponenten

- a) Es sei γ eine nicht geschlossene Jordankurve und U eine nichtleere offene Menge mit Rand $\partial U \subseteq \gamma^*$. Dann ist U unbeschränkt und $U = \mathbb{R}^2 \setminus \partial U$.
- b) Es sei γ eine geschlossene Jordankurve und U eine Komponente von $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma^*$. Dann gilt $\partial U = \gamma^*$.

Beweis.

a) Es sei $u \in U$. Der Rand von U gehört nicht zu U , also $x \notin \partial U$. Nach der eben gesehenen Folgerung ist $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma^*$ zusammenhängend, und weil es offen ist auch wegzusammenhängend. Für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma^*$ gibt es also einen Weg von x nach

u , der nicht durch γ^* läuft, also insbesondere auch nicht durch den Rand von U . Da $u \in U$ gilt, verläuft der Weg ganz in U , und somit liegt auch $x \in U$.

b) Es ist klar, dass $\partial U \subseteq \gamma^*$. Wäre die Inklusion echt, so könnte man γ^* durch Wegnahme eines kleinen Stückes zu einer nicht geschlossenen Jordankurve machen, die den Rand von U enthält, und dann liefert a) einen Widerspruch. \circ

Bemerkung 4.2.8 Der Jordansche Kurvensatz

Die beiden vorangehenden Aussagen sind Schritte auf dem Weg zum Beweis des folgenden Satzes, den wir hier nicht beweisen werden:

Es sei $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Jordankurve mit Bild γ^ .*

Dann hat $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma^$ genau zwei Zusammenhangskomponenten, von denen eine beschränkt und eine unbeschränkt ist.*

Die letzte Folgerung zeigt uns immerhin, dass der Rand jeder Komponente γ^* ist.

Intuitiv kann man so argumentieren: Wenn der Punkt Q in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von γ^* liegt und P irgendwo in der Ebene, aber nicht auf γ^* , dann betrachtet man die Verbindungsstrecke von Q nach P und zählt, wie oft sie γ^* durchstößt. Ist diese Anzahl ungerade, so ist man in der beschränkten Zusammenhangskomponente, ist sie gerade, so in der unbeschränkten.

Die Schwierigkeit besteht eben darin, diese Intuition zu präzisieren und insbesondere das Problem auszuräumen, dass die Anzahl der Durchstoßpunkte auch unendlich sein kann.

Wir werden später (5.3.14) ein anders gelagertes Argument sehen, das uns zeigt, dass es mindestens zwei Zusammenhangskomponenten geben muss.

Als nächstes wollen wir den Jordanschen Kurvensatz benutzen, um eine Version des Eulerschen Polyedersatzes herzuleiten.

Definition 4.2.9 Planare Graphen

Ein *planarer Graph* ist eine injektive stetige Abbildung $\pi : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ eines endlichen Graphen $G = (E, K, \tau)$ (siehe 2.1.3) in die Ebene \mathbb{R}^2 . Den Graphen G fasst man hierbei wie in der angegebenen Nummer als metrischen und damit auch als topologischen Raum auf.

Die Anzahl der Ecken des Graphen heißt e , die der Kanten heißt k , und die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus \pi(G)$ heißt f . Eine Zusammenhangskomponente dieses Komplements nennen wir auch eine Fläche.

Satz 4.2.10 Eulers Polyederformel

Es sei $\pi : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein (nichtleerer) zusammenhängender planarer Graph mit e Ecken, k Kanten und f Flächen.

Dann gilt $e - k + f = 2$.

Beweis. Wir machen vollständige Induktion nach der Anzahl der Flächen.

Ist $f = 1$, so enthält der Graph keinen geschlossenen Weg, da dieser mittels π ein Jordankurve gäbe, die die Ebene in zwei Komponenten zerschneidet.

Daher gibt es mindestens eine Ecke, die nur zu einer Kante gehört, und diese Kante ist nicht geschlossen. Entfernt man diese eine Ecke und Kante, so bleibt ein zusammenhängender Graph mit weniger Ecken und Kanten übrig. Dies macht man sooft wie möglich, also bis keine Kante mehr übrig bleibt. Da der Graph zusammenhängend ist, besitzt er dann nur noch eine Ecke und keine Kante, und die Größe $e - k + f$ ist offensichtlich 2. Sie hat sich aber beim Wegnehmen der Ecken und Kanten nicht geändert, denn immer wurde eine Ecke und eine Kante entfernt.

Ist $f \geq 2$, so gibt es eine Kante, die zwei benachbarte Flächen als gemeinsames Randstück besitzen. Entfernt man diese Kante (unter Beibehaltung der Ecken) so verschmelzen die beiden Flächen zu einer größeren, es wird als f und e jeweils eins kleiner.

Das liefert den Induktionsschluss, denn der Graph bleibt zusammenhängend. \circ

Bemerkung 4.2.11 Das Polyeder hinter dem Satz

Wenn man ein richtiges (konvexes) Polyeder hat, so kann man dieses auf die Sphäre \mathbb{S}^2 zeichnen. Wenn N ein Punkt in einer Fläche des Polyeders ist, so kann man die Ecken und Kanten des Polyeders von N ausgehend stereographisch auf die Ebene projizieren, und erhält einen planaren Graphen, der so viele Ecken, Kanten und Flächen hat wie unser Polyeder. Daher gilt die Eulersche Polyederformel auch für unser Polyeder.

Bemerkung 4.2.12 Neue Ziele

- a) Wenn man im Erweiterungssatz von Tietze anstelle einer reellwertigen Funktion eine vektorwertige Funktion mit Werten in $[-1, 1]^d$ auf A vorgibt, so lassen sich die Komponenten (die ja alle stetige Funktionen sind) alle nach X fortsetzen und zu einer Fortsetzung von f zu einer Funktion $F : X \rightarrow [-1, 1]^d$ kombinieren.

Wenn anstelle eines solchen übersichtlichen Raums ein Zielraum verwendet wird, von dem man weiß, dass er zu $[-1, 1]^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$ homöomorph ist, so gilt der Fortsetzungssatz immer noch.

- b) Sie können zeigen, dass es zum Beispiel nicht möglich ist, eine reellwertige stetige Abbildung auf \mathbb{Z} mit der koendlichen Topologie (siehe 3.2.5c)) zu finden, die bei 0 den Wert 0 und bei 1 den Wert 1 annimmt.

Jede reellwertige Funktion auf \mathbb{Z} mit dieser Topologie ist nämlich konstant.

4.3 Flächen

Definition 4.3.1 Flächen

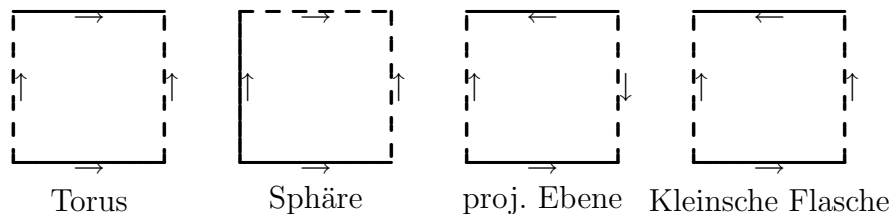
Eine *Fläche* ist eine (nichtleere) zusammenhängende zweidimensionale Mannigfaltigkeit.

Beispiel 4.3.2 Noch einmal

- a) Eine (nichtleere) offene zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R}^2 ist eine Fläche. Solch eine Fläche ist niemals kompakt.
- b) Die Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ ist eine kompakte Fläche. Auch $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^2/\pm 1$ ist eine kompakte Fläche.
- c) Der Torus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ist eine kompakte Fläche.
- d) $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \cdot (1, 0) \simeq (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$ ist eine Fläche, wenn auch nicht kompakt. Sie ist homöomorph zu $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Wieso?

Bemerkung 4.3.3 Vier Verklebevorschriften

Wenn man ein Quadrat $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ nimmt und Kantenpaare verklebt, so hat man hierfür 4 grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten.



Hierbei werden die gestrichelten Kanten miteinander in Pfeilrichtung verklebt und genauso auch die ungestrichelten. Wir werden nachher noch ein anderes Modell der Kleinschen Flasche sehen.

Bemerkung 4.3.4 Vorsicht ist geboten

Den Torus bekommen wir, wenn wir in einem Quadrat gegenüberliegende Seiten wie im Bild angegeben verkleben.

Mindestens zwei Fragen liegen nahe.

1. Frage: Wo eigentlich ist im Torus das „Loch“?

Tatsächlich ist die Lage des Loches vollkommen willkürlich von unserer Darstellung des Torus im \mathbb{R}^3 abhängig, es ist keineswegs klar, welches der beiden Kantenpaare des Quadrats „innen“ durchgeht, und welches nicht.

Dass es in jeder dreidimensionalen Darstellung des Torus ein Loch geben muss, ist jedoch eine innere Eigenschaft des Torus, die nicht von unserem Geschick oder Ungeschick abhängt.

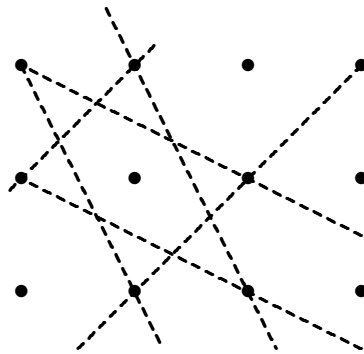
Wir werden darauf zurückkommen, und es gibt verschieden subtile Arten, dies zu behandeln.

2. Frage: Was passiert bei einem regelmäßigen Sechseck?

Gegenfrage: Wieso eigentlich regelmäßig? Das sieht die Topologie ja gar nicht.

Na gut, dann eben nicht. Aber Sechseck, dabei bleibe ich.

Okay, dann erinnern wir uns daran, dass der Torus auch $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ist, und das Quadrat nur ein gutes, fast redundanzfreies Vertretersystem für die Bahnen. Und da gibt es jetzt tatsächlich auch ein sechseckiges, dessen gegenüberliegende Kanten beim Quotientenbilden durch Translationen verklebt werden.



Hier sind die Punkte die Elemente von \mathbb{Z}^2 . Dass das Sechseck die gewünschte Eigenschaft hat zeigt sich zum Beispiel daran, wie es sich aus Teilen des achsparallelen Quadrats mit Mittelpunkt 0 und Kantenlänge 1 zusammenstückeln lässt.

Was passiert bei einem Achteck?

Konstruktion 4.3.5 Ankleben eines Henkels

Es sei X eine Fläche und $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ein Torus. Weiter seien $P \in X$ und $Q \in T$ Punkte.

Für jeden dieser Punkte wählen wir eine Umgebung (U von P und V von Q), die zur Kreisscheibe $B_2(0)$ mit Radius 2 homöomorph ist, und zeichnen im Atlas jeweils einen Homöomorphismus

$$\varphi_U : U \rightarrow B_2(0), \quad \tilde{\varphi}_V : V \rightarrow B_2(0)$$

aus.

Aus X schneiden wir das Urbild $\varphi^{-1}(\overline{B_1(0)})$ aus und erhalten die offene Teilmenge

$$X \setminus \varphi^{-1}(\overline{B_1(0)}).$$

Darin nennen wir

$$\kappa_P := \varphi^{-1}(B_2(0) \setminus \overline{B_1(0)})$$

den Kragen bei P .

Genauso verfahren wir mit T und erhalten einen Kragen bei Q .

Beide Kragen sind homöomorph zum offenen Kreisring $B_2(0) \setminus \overline{B_1(0)}$.

Wir definieren einen neuen topologischen Raum Y durch

$$Y := \left(X \setminus \varphi^{-1}(\overline{B_1(0)}) \cup T \setminus \tilde{\varphi}^{-1}(\overline{B_1(0)}) \right) / \sim,$$

wobei die Äquivalenzrelation \sim zwei Punkte $S \in \kappa_P$ und $T \in \kappa_Q$ identifiziert, wenn sie von φ_U und $\tilde{\varphi}_V$ auf denselben Punkt im Kreisring abgebildet werden.

Man sagt dann, dass Y durch *Ankleben eines Henkels* an X entsteht.

Man kann das auch erreichen, indem man lediglich offene Kreise um P und Q ausschneidet und deren Komplemente in X und T auf naheliegende Weise verklebt. Dies nennt man auch die *zusammenhängende Summe* von X und T , in Zeichen: $X \# T$.

Ganz genauso lässt sich auch die *zusammenhängende Summe* zweier Flächen X und Y bilden (Ausschneiden von Kreisen und Verkleben deren Ränder).

Der topologische Raum $X \# Y$ sieht hierbei nicht, was P und Q sind und wie groß die Kreisscheiben um diese gewählt wurden, es ist jedoch sehr muhlsam, dies präzise zu beweisen. Und übrigens ist $\mathbb{S}^2 \# X$ topologisch nichts anderes als X .

Vielleicht sollte man sich an dieser Stelle überlegen, wieso die Kleinsche Flasche die zusammenhängende Summe zweier projektiver Ebenen ist. Dem Autor war es dabei hilfreich einzusehen, dass $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ohne eine Kreisscheibe ein sogenanntes Möbiusband ist.

Unser nächstes Ziel wird es sein zu sehen, welche Flächen sich – ausgehend von der Sphäre – durch sukzessives Ankleben von Henkeln und projektiven Ebenen gewinnen lassen.

Dabei folgen wir dem Buch *Algebraic Topology: An Introduction* von W.S.Massey (Springer, 1987).

Hilfssatz 4.3.6 Ein $4n$ -Eck

Es sei V ein $4n$ -Eck. Ausgehend von einer Ecke durchlaufen wir die Kanten und bezeichnen sie mit

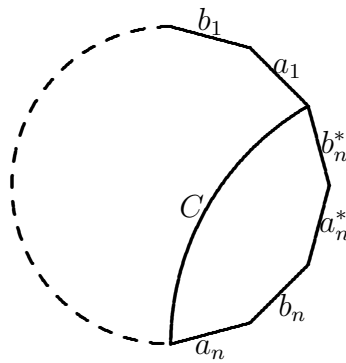
$$a_1, b_1, a_1^*, b_1^*, a_2, b_2, a_2^*, b_2^* \dots, a_n, b_n, a_n^*, b_n^*.$$

Nun verkleben wir für $1 \leq i \leq n$ die Kanten a_i und a_i^* sowie die Kanten b_i und b_i^* jeweils mit entgegengesetzter Durchlaufrihtung (diese ist durch die Reihenfolge der Kanten gegeben).

Dann entsteht aus V eine Sphäre mit n Henkeln.

Beweis. Der Beweis läuft per vollständiger Induktion nach n . Für $n = 1$ bekommen wir das Bild des Torus, das uns ohnehin vor Augen schwebt.

Sei also die Behauptung wahr für $n - 1$. Dann zerschneiden wir das $4n$ -Eck längs einer Kurve C wie im Bild angedeutet:



Wenn wir nun im verbleibenden $(4(n - 1) + 1)$ -Eck die Kanten a_1, \dots, b_{n-1}^* wie gefordert verkleben, entsteht nach Induktionsvoraussetzung eine Sphäre mit $n - 1$ Henkeln, aus der eine Kreisscheibe (diese wird von C berandet) ausgeschnitten wurde. Genauso liefert auch das 5-Eck mit Kanten $a_n, b_n, a_n^*, b_n^*, C$ einen Torus, aus dem eine Kreisscheibe entfernt wurde.

Nun verklebt man die beiden C entsprechenden Kanten und klebt dabei einen Henkel an eine Sphäre mit $n - 1$ Henkeln, erhält also wie gewünscht eine Sphäre mit n Henkeln. \circ

Bemerkung 4.3.7 Anders herum

Wenn man in der Situation des letzten Hilfssatzes beim Verkleben nicht die Richtungen ändert, so klebt man n projektive Ebenen an die Sphäre. Das Argument läuft ganz analog.

Man bekommt das aber auch billiger, wenn man in einem $2n$ -Eck die Randstücke mit $a_1, a_1, a_2, a_2, \dots, a_n, a_n$ bezeichnet und die jeweils 2 Kopien namens a_i im Durchlaufsinne verklebt.

Bemerkung 4.3.8 Ohne Beweis: Triangulierung

Es sei $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ das (abgeschlossene) Dreieck mit den Eckpunkten $0, (1, 0), (0, 1)$.

Ein Dreieck in einer Fläche S ist eine Teilmenge $T \subseteq S$ zusammen mit einem Homöomorphismus $\varphi : \Delta \rightarrow T$, sodass man auch von Ecken und Kanten von T sprechen kann: Diese sind die Bilder der Ecken und Kanten von Δ unter φ .

Jede kompakte Fläche S hat eine endliche Triangulierung.

Das bedeutet: Es gibt endlich viele Dreiecke $T_1, \dots, T_n \subset S$, sodass

$$S = \cup_i T_i$$

gilt und der Schnitt zweier Dreiecke entweder aus einer gemeinsamen Ecke besteht oder eine gemeinsame Kante der Dreiecke oder leer ist.

Diesen Satz wollen wir jetzt benutzen, ohne ihn zu beweisen.

Satz 4.3.9 Alle kompakten Flächen

Jede kompakte Fläche X ist eine Sphäre, an die $n \in \mathbb{N}_0$ Henkel oder $n \in \mathbb{N}$ projektive Ebenen angeklebt wurden.

Beweis. Der Beweis dieses Satzes zieht sich ein wenig hin und läuft in mehreren Stufen ab.

Mit \mathbb{D}^2 bezeichnen wir den Einheitsvollkreis in der Ebene. In erster Näherung müssen wir zeigen, dass X aus \mathbb{D}^2 durch Verklebung geeigneter Teile des Randes entsteht. Diese Verklebungsvorschrift werden wir dann adjustieren um in eine Form zu kommen, wie wir es uns in 4.3.6 und der nachfolgenden Bemerkung zurechtgelegt haben.

Vorbereitung

Für die Rohform benutzen wir eine Triangulierung bestehend aus Dreiecken

$$\varphi_i : \Delta \rightarrow T_i \subset X, \quad 1 \leq i \leq k,$$

und bringen die Dreiecke in solch eine Reihenfolge, dass jeweils T_{i+1} mit einem der Dreiecke T_1, \dots, T_i eine Kante gemeinsam hat, die wir uns merken (genau eine, falls es mehrere gibt) und e_i nennen. Das geht, da X zusammenhängend ist.

Nun nehmen wir für jedes Dreieck T_i ein eigenes Referenzdreieck Δ_i und verkleben diese sukzessive an den e_i entsprechenden Kanten. Da Δ_i immer zu \mathbb{D}^2 homöomorph ist und die Verklebung zweier Kreisscheiben längs eines halben Randes wieder eine Kreisscheibe ist, ist auch der aus den Δ_i durch Verkleben entstandene Raum homöomorph zu \mathbb{D}^2 (hier versteckt sich eine kleine Übungsaufgabe).

Der Rand dieser neuen Kreisscheibe besteht aus den Randstücken der Δ_i , die noch nicht beim Verkleben benutzt wurden. Sie entsprechen jeweils Randstücken der alten Dreiecke T_i , die insgesamt keine der Kanten e_1, \dots, e_{k-1} sind.

Wir wählen eine Dreiecksecke E als Startpunkt und eine Richtung, durchlaufen dann den Rand von \mathbb{D}^2 und merken uns die Randstücke a, b, c, \dots , wobei wir dieselbe Kante beim zweiten Durchlaufen mit demselben Buchstaben bezeichnen, uns jedoch durch einen künstlichen Exponenten ± 1 merken, ob sie in der Richtung des Durchlaufs an ihr Pendant geklebt wird oder entgegengesetzt.

Die vier Bilder aus 4.3.3 bekämen hier also (je nach Wahl des Anfangspunkts und der Orientierung) die „Wörter“ $aba^{-1}b^{-1}$ (Torus), $aa^{-1}bb^{-1}$ (Sphäre), $abab$ (projektive Ebene) und $abab^{-1}$ (Kleinsche Flasche) zugeordnet.

Ist dieser Exponent $+1$, so sprechen wir von einem Kantenpaar von Typ 1. Ist er -1 , so sagen wir, das Kantenpaar sei von Typ 2.

Im Laufe der nachfolgenden Schritte werden wir diese Situation immer wieder durch äquivalente ersetzen, also solche, die dieselbe Fläche liefern. Wir werden dabei Ecken und Kanten entfernen oder Vielecke verschieben und gegebenenfalls neue Kanten erzeugen.

Schritt 1: Entfernen eines benachbarten Typ-2-Kantenpaares.

Wenn es ein Paar benachbarter Kanten von Typ 2 gibt (d.h. im Wort taucht eine Sequenz xx^{-1} auf, oder der letzte Buchstabe ist a^{-1}), dann gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder es gibt nur dieses Kantenpaar, dann ist $X = \mathbb{S}^2$ (wie man leicht sieht) oder \mathbb{D}^2 nach seiner Verklebung homöomorph zu \mathbb{D}^2 , und wir haben zwei Kanten und eine Ecke entfernt. Wir tun dies sooft wir können.

Mit anderen Worten: Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass es ein solches Kantenpaar nicht gibt und X nicht homöomorph zur Sphäre ist.

Schritt 2: Reduktion auf eine Äquivalenzklasse von Ecken.

Zwei Ecken unseres zerlegten Kreises heißen äquivalent, wenn sie in X demselben Punkt entsprechen. Die $4n$ -Ecke aus 4.3.3 haben nur eine Äquivalenzklasse von Ecken, und das müssen wir im allgemeinen auch erreichen. Zwei benachbarte Ecken sind bisher nie äquivalent, da unsere Dreiecke ja drei Ecken haben. In Wirklichkeit vergessen wir jetzt die Triangulierung und arbeiten nur noch mit dem Rand des Einheitskreises. Wir werden diesen mehrfach zerschneiden und wieder verkleben und dabei zunächst die Anzahl der Äquivalenzklassen von Ecken auf 1 reduzieren.

Dazu nehmen wir zunächst an, es gebe zwei Ecken, die nicht äquivalent sind. Dann gibt es auch zwei benachbarte solche Ecken, P und Q . Sie sind durch eine Kante κ verbunden. Die zweite von Q ausgehende Kante λ ist nicht κ^{-1} , dafür haben wir in Schritt 1 gesorgt. Sie ist auch nicht κ , da sonst beim Verkleben nachher doch P mit Q identifiziert würde. Nun zerschneiden wir \mathbb{D}^2 längs der Sekante μ von P nach R und kleben das abgeschnittene Dreieck längs der λ entsprechenden Kante an das Reststück. Dabei haben wir die Äquivalenzklasse von Q um 1 verkleinert, die von P um 1 vergrößert, λ und sein Pendant verklebt

und μ und sein Pendant als neue Kanten eingeführt.

Da die Rollen von P und Q hier vollkommen symmetrisch sind, können wir dies so einrichten, dass eine von uns ausgesuchte Äquivalenzklasse größer wird. Dies tun wir, solange dies nicht die einzige Äquivalenzklasse ist, und eliminieren dabei nach und nach die anderen.

Schritt 3: Sortieren der Kantenpaare vom Typ 1.

Wenn wir ein Kantenpaar $\dots \kappa \dots \kappa \dots$ vom Typ 1 haben, so zerschneiden wir die Kreisscheibe längs der Verbindungsstrecke λ , die die Enden der beiden Kanten namens κ verbindet, und verkleben die beiden Stücke längs κ . Das Ergebnis hat das Paar $\lambda\lambda$ benachbarter Kanten vom Typ 1. Da die anderen Kantenpaare davon nicht betroffen sind, können wir durch Wiederholung dieses Schrittes erreichen, dass alle Typ-1-Paare aus benachbarten Kanten bestehen.

Schritt 4: Sortieren der Kantenpaare vom Typ 2.

Wenn es nun ein Kantenpaar $\dots \kappa \dots \kappa^{-1} \dots$ vom Typ 2 gibt, so ist es wegen Schritt 2 nicht benachbart, und es muss (bis auf zyklische Vertauschung der Kanten, also Wahl des Anfangspunkts E) ein weiteres Kantenpaar vom Typ 2 geben, das κ und κ^{-1} trennt. Denn: Da es nur eine Äquivalenzklasse von Ecken gibt, muss mindestens ein Eck zwischen κ und κ^{-1} mit einem verklebt werden, das zwischen κ^{-1} und κ liegt, aber dies kann nur durch Verkleben eines Kantenpaares geschehen. Da Kantenpaare vom Typ 1 mittlerweile alle aus benachbarten Kantenpaaren bestehen, muss es ein Kantenpaar vom Typ 2 geben, das diesen Dienst leistet.

Sei nun $\dots \kappa \dots \lambda \dots \kappa^{-1} \dots \lambda^{-1} \dots$ solch ein Paar sich trennender Kantenpaare vom Typ 2. Wenn man die Kreisscheibe längs eines Weges c vom Ende von κ zum Ende von κ^{-1} aufschneidet und die beiden Reste längs der λ -Stücke verklebt, erhält man eine neue Kreisscheibe, bei der aus dem Weg c ein Kantenpaar γ, γ^{-1} vom Typ 2 wird, und der Rand sieht so aus:

$$\dots \kappa \gamma \kappa^{-1} \dots \gamma^{-1} \dots$$

Wiederholt man dies für γ und κ anstelle von κ und λ , so wird insgesamt aus dem Paar sich trennender Kantenpaare ein Paar von Paaren der folgenden Gestalt:

$$\dots \delta \gamma \delta^{-1} \gamma^{-1} \dots$$

Die anderen (Paare von) Kantenpaare(n) sind davon nicht betroffen. Daher auch können wir notfalls den Prozess wiederholen, solange, bis alle Kantenpaare vom Typ 2 in zusammenhängenden, sich trennenden Zweiergrüppchen beieinander sind.

Am Ende hat man drei Möglichkeiten:

- Entweder es gibt nur Kantenpaare vom Typ 1, dann ist X eine Sphäre mit einer Anzahl von projektiven Ebenen.
- Oder es gibt nur Kantenpaare vom Typ 2, dann sagt Schritt 4, dass wir in der Situation von 4.3.6 sind und eine Sphäre mit einer gewissen Anzahl von Henkeln vorliegt.
- Oder es gibt Kantenpaare vom Typ 1 und vom Typ 2. In diesem Fall überlege man sich, dass eine projektive Ebene mit einem Henkel homöomorph ist zu einer zusammenhängenden Summe von 3 projektiven Ebenen, und sehe damit ein, dass sich nach und nach die Kantenpaare vom Typ 2 eliminieren lassen.

Das beendet den Beweis der Vollständigkeit unserer Liste von zusammenhängenden Flächen. ○

Bemerkung 4.3.10 Orientierung

Eine Fläche heißt *orientierbar*, wenn sie eine zusammenhängende Summe von endlich vielen Tori ist (0 Tori sind per definitionem eine Sphäre). In diesem Fall ist X eine Fläche wie in 4.3.6, und jedes Kantenstück am Rand der Kreisscheibe hat ein links liegendes Dreieck und ein rechts liegendes Dreieck, und das lässt sich konsistent machen.

Wir gehen hier nicht näher auf diese Frage ein, die im Rahmen der Differentialtopologie eine befriedigendere Klärung erfährt: Es gibt einen differenzierbaren Atlas von X im Sinne von 4.1.9b), bei dem die Jacobimatrizen der Kartenwechselabbildungen alle positive Determinante haben. . .

Kapitel 5

Homotopie

5.1 Die Umlaufzahl

Hilfssatz 5.1.1 Wo auch Tietze nicht helfen kann...

Es sei $K := \overline{B_1(0)} \subseteq \mathbb{R}^2$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe und \mathbb{S}^1 ihr Rand: $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Dann lässt sich die Identität auf \mathbb{S}^1 nicht zu einer stetigen Abbildung von K nach \mathbb{S}^1 fortsetzen.

Denn: Die Idee ist, dass solch eine stetige Fortsetzung den Einheitskreis \mathbb{S}^1 „zerreißen“ müsste. Am Rand von K läuft sie einmal um den Kreis herum, und tut dies dann auch in der Nähe des Randes noch; ganz in der Mitte aber, weit innen in K , klappt das wegen der Stetigkeit nicht mehr.

Um dies präzise zu begründen, müssen wir etwas ausholen. Wir tun dies in dieser speziellen Situation, weil sie in besonders wichtiger Weise beleuchtet, was Homotopie ist und wofür Überlagerungen gut sind. Diese Begriffe werden wir später einführen.

Wir werden jetzt in Analogie zu 2.1.7 mit der Abbildung

$$\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1, \quad x \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

arbeiten. Diese ist stetig, surjektiv, und $x, y \in \mathbb{R}$ haben genau dann das selbe Bild unter π , wenn ihre Differenz ganzzahlig ist. Sie liefert einen Homöomorphismus von \mathbb{R}/\mathbb{Z} mit dem Einheitskreis, der nicht abstandstreu ist (wie damals) sondern alle Abstände durch 2π teilt.

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Umgebung U (zum Beispiel $(x - \frac{1}{3}, x + \frac{1}{3})$), sodass π auf U injektiv ist und die Umkehrabbildung $\psi : \pi(U) \longrightarrow U$ auch stetig ist. Sie ordnet einem Punkt $P \in \pi(U) \subseteq \mathbb{S}^1$ den eindeutig bestimmten Winkel $w \in U$ zu, für den $P = \pi(w)$ gilt.

Bemerkung 5.1.2 Eine Vorbereitung

Es sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ stetig und $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ mit $\pi(\alpha_0) = \gamma(0)$. Dann gibt es genau eine stetige Abbildung $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\lambda(0) = \alpha_0$ und $\pi \circ \lambda = \gamma$.

Eindeutigkeit: Sind $\lambda, \tilde{\lambda}$ zwei Funktionen mit den gewünschten Eigenschaften, so ist $\lambda - \tilde{\lambda}$ eine stetige reellwertige Funktion auf $[0, 1]$, die wegen der Eigenschaften von π nur ganze Zahlen als Werte annimmt. Also ist die Differenz konstant. Da aber λ und $\tilde{\lambda}$ bei 0 den selben Wert annehmen, stimmen sie auf ganz $[0, 1]$ überein.

Existenz: Wir benützen die gleichmäßige Stetigkeit von γ , und sehen, dass es eine natürliche Zahl N gibt, sodass

$$\forall x, y \in [0, 1] : |x - y| \leq \frac{1}{N} \Rightarrow |\gamma(x) - \gamma(y)| < 2.$$

Nun unterteilen wir das Intervall $[0, 1]$ in N gleichgroße Teilintervalle

$$J_k := \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right] \subseteq \mathbb{R}, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Die Einschränkung von γ auf J_k landet in $B_k := \mathbb{S}^1 \setminus \{-\gamma(\frac{k-1}{N})\}$, denn für keinen Punkt $t \in J_k$ ist $-\gamma(t) \in \gamma(J_k)$. So hatten wir N ja gewählt.

Auf B_k gibt es eine einseitige stetige Inverse ψ_k zu π ,

$$\exists \psi_k : B_k \rightarrow \mathbb{R} : \pi \circ \psi_k = \text{Id}_{B_k}.$$

Mit dieser inversen ψ_x können wir auf B_k eine stetige Funktion $\lambda_k : J_k \rightarrow \mathbb{R}$ definieren durch

$$\lambda_k := \psi_k \circ \gamma|_{J_k}.$$

Die stetige Funktion λ_k erfüllt also für alle $t \in J_k$ die gewünschte Gleichung

$$\pi(\lambda_k(t)) = \gamma(t).$$

Wir können jetzt die Funktionen λ_k benutzen, um auf ganz $[0, 1]$ eine passende Funktion λ zu konstruieren.

Es gibt ja ganze Zahlen a_k , sodass

$$\lambda_k\left(\frac{k}{N}\right) = \lambda_{k+1}\left(\frac{k}{N}\right) + a_k,$$

denn π bildet die reellen Zahlen $\lambda_k(\frac{k}{N})$ und $\lambda_{k+1}(\frac{k}{N})$ auf das selbe Element $\gamma(\frac{k}{N})$ ab.

Nun definieren wir die stetige Funktion $\tilde{\lambda} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$\tilde{\lambda}(t) := \lambda_k(t) + a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}, \quad \frac{k-1}{N} \leq t \leq \frac{k}{N},$$

was wohldefiniert ist durch die Wahl der a_i . Das zeigt dann auch schon die Stetigkeit von $\tilde{\lambda}$, die nach Konstruktion nur noch an den Nahtstellen $\frac{k}{N}, 1 \leq k \leq N-1$, zu überprüfen ist.

Es gilt konstruktionsgemäß

$$\pi \circ \tilde{\lambda} = \gamma.$$

Den Anfangswert α_0 erreichen wir durch die Vorschrift

$$\lambda := \tilde{\lambda} + \alpha_0 - \tilde{\lambda}(0).$$

Nach dieser Vorbereitung kehren wir zurück zum Beweis der eigentlich uns interessierenden Aussage.

Es sei $F : K \rightarrow \mathbb{S}^1$ eine stetige Abbildung.

Dann ist $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1, \beta(r) = F((r, 0))$ eine stetige Abbildung, die wir gemäß unserer Vorbereitung schreiben können als

$$\beta = \pi \circ \alpha, \quad \alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig, geeignet.}$$

Weiter haben wir für jedes $r \in [0, 1]$ eine Kurve

$$\gamma_r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1, \gamma_r(t) := F(r \cdot (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)).$$

Sie merkt sich, was F auf dem Kreis mit Radius r um den Nullpunkt macht. Nach unserer Vorbereitung gibt es also für jedes r genau eine stetige Abbildung

$$\lambda_r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ sodass } \lambda_r(0) = \alpha(0) \text{ und } \gamma_r = \pi \circ \lambda_r.$$

Da hier der Anfangswert $\alpha(r)$ von γ_r stetig von r abhängt, erhalten wir eine stetige Abbildung

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(r, t) := \lambda_r(t).$$

(Die Stetigkeit muss man eigentlich noch verifizieren – ich tue das hier nicht!) Da H stetig ist, ist auch die Abbildung

$$h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, r \mapsto H(r, 1) - H(r, 0)$$

stetig.

Wegen

$$\pi(H(r, 1)) = \gamma_r(1) = F((r, 0)) = \gamma_r(0) = \pi(H(r, 0))$$

nimmt h nur Werte in den ganzen Zahlen an, und ist damit konstant. Da sicher $h(0) = 0$ gilt – γ_0 ist ja konstant – muss demnach auch $h(1) = 0$ gelten.

Wäre nun die Einschränkung von F auf den Rand \mathbb{S}^1 von K die Identität, so wäre $\gamma_1 = \pi|_{[0,1]}$. Damit wäre $\lambda_1(t) = t + \alpha(1)$, und

$$h(1) = \lambda_1(1) - \lambda_1(0) = 1.$$

Das ist ein Widerspruch. – UFF!

Bemerkung 5.1.3 Umlaufzahl

Eng verwandt mit dem eben gesehenen Phänomen ist die Definition der Umlaufzahl einer geschlossenen Kurve im \mathbb{R}^2 .

- a) Es sei $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine stetige, geschlossene (d.h. $\gamma(0) = \gamma(1)$) Kurve. Wir können γ schreiben als

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| \cdot \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}.$$

Der erste Faktor ist eine stetige Abbildung von $[0, 1]$ in die positiven reellen Zahlen, der zweite Faktor nimmt Werte in \mathbb{S}^1 an. Folglich gibt es eine stetige Abbildung $\lambda : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\forall t \in [0, 1] : \gamma(t) = |\gamma(t)| \cdot \pi(\lambda(t)).$$

Dann definieren wir die Umlaufzahl von γ um den Nullpunkt durch

$$\chi(\gamma, 0) := \lambda(1) - \lambda(0).$$

Das ist immer eine ganze Zahl.

Analog definieren wir für eine beliebige geschlossene Kurve γ und ein $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \text{Bild}(\gamma)$ die Umlaufzahl von γ um x durch

$$\chi(\gamma, x) := \chi(\gamma - x, 0).$$

- b) Ist

$$\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

stetig und ist für jedes $r \in [0, 1]$ die Kurve

$$\gamma_r : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \gamma_r(t) := \Gamma(r, t)$$

geschlossen, dann haben alle Kurven γ_r dieselbe Umlaufzahl um den Nullpunkt.

Denn wie oben lässt sich eine stetige Abbildung

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

finden, sodass für alle $(r, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ die Gleichung

$$\frac{\Gamma(r, t)}{|\Gamma(r, t)|} = \pi(H(r, t))$$

erfüllt ist. Dann gilt für jedes r aber auch

$$\chi(\gamma_r, 0) = H(r, 1) - H(r, 0).$$

Da dies stetig von r abhängt und nur ganzzahlige Werte annimmt, ist diese Größe konstant auf $[0, 1]$.

Satz 5.1.4 Brouwers Fixpunktsatz

Es sei $K = \mathbb{D}^2$ und $f : K \rightarrow K$ eine stetige Abbildung.

Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis. Wenn f keinen Fixpunkt hätte, dann gäbe es eine eindeutig bestimmte Funktion $\lambda : K \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in K$ der Punkt $f(x) + \lambda(x) \cdot (x - f(x))$ auf dem Einheitskreis \mathbb{S}^1 liegt. Diese ist stetig und nimmt auf \mathbb{S}^1 konstant den Wert 1 an.

Also ist

$$G : K \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad x \mapsto f(x) + \lambda(x) \cdot (x - f(x))$$

eine stetige Abbildung, die auf \mathbb{S}^1 die Identität ist. 5.1.1 sagt uns, dass es so etwas nicht gibt. \circ

Folgerung 5.1.5 Eine erzwungene Surjektivität

Es sei $K = \mathbb{D}^2$ und $f : K \rightarrow K$ stetig mit $f|_{\mathbb{S}^1} = \text{Id}_{\mathbb{S}^1}$.

Dann ist f surjektiv.

Beweis. Wäre $P \in K \setminus f(K)$, so könnte man wieder für jedes $x \in K$ den Funktionswert $f(x)$ von P aus auf dem Rand \mathbb{S}^1 projizieren und erhielte (im erneuten Widerspruch zu 5.1.1 eine stetige Abbildung von K nach \mathbb{S}^1 , die auf \mathbb{S}^1 die Identität liefert. \circ

Bemerkung 5.1.6 Ersatz

Im Brouwerschen Fixpunktsatz und seiner Folgerung darf man wieder K durch jeden zu \mathbb{D}^2 homöomorphen Raum X ersetzen, wobei der Rand von K ersetzt wird durch das Bild von \mathbb{S}^1 in X . Der Rand von X ist ja zunächst einmal leer, denn X liegt nicht von vorneherein in einem größeren Raum (so wie K)!

5.2 Homotope Abbildungen

Definition 5.2.1 Homotope Abbildungen

a) Es seien X, Y topologische Räume und $f, g : X \rightarrow Y$ zwei stetige Abbildungen. Weiter sei ab jetzt $\mathbb{I} = [0, 1]$ das Einheitsintervall.

Dann heißen f und g *homotop*, falls es eine stetige Abbildung

$$H : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y$$

gibt mit der Eigenschaft

$$\forall x \in X : H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = g(x).$$

Die Abbildung H heißt hierbei eine *Homotopie* zwischen f und g .

Die Heuristik dabei ist, dass sich f und g stetig ineinander deformieren lassen. Insbesondere ist für jedes x die Abbildung

$$\mathbb{I} \ni t \mapsto H(x, t)$$

ein stetiger Weg von $f(x)$ nach $g(x)$. Das heißt auch, dass die Wegzusammenhangskomponenten von Y eine große Rolle spielen.

b) Auf $\mathcal{C}(X, Y)$ wird meistens die *kompakt-offene* Topologie betrachtet. Sie hat als Subbasis die Mengen

$$\{f : X \longrightarrow Y \mid f(K) \subseteq U\},$$

wobei $K \subseteq X$ kompakt und $U \subseteq Y$ offen ist.

c) X heißt *lokal kompakt*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung hat, die in einem Kompaktum enthalten ist.

d) Ist X lokal kompakt und hausdorffsch, so ist eine Homotopie $H : X \times \mathbb{I} \longrightarrow Y$ nichts anderes als ein stetiger Weg

$$\mathbb{I} \ni t \mapsto H_t = [X \ni x \mapsto H(x, t) \in Y] \in \mathcal{C}(X, Y),$$

der $H_0 = f$ mit $H_1 = g$ verbindet.

Bemerkung 5.2.2 Äquivalenzrelation

Wenn X, Y zwei topologische Räume sind, so ist die Eigenschaft, homotop zu sein, eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{C}(X, Y)$.

Symmetrie und Reflexivität sind klar. Für die Transitivität seien f, g, h stetige Abbildungen von X nach Y , H sei eine Homotopie zwischen f und g , und K eine Homotopie zwischen g und h . Wir definieren

$$L : X \times \mathbb{I} \longrightarrow Y, L(x, t) := \begin{cases} H(x, 2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ K(x, 2t - 1) & t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Dann ist L stetig (das muss man offensichtlich nur für $t = \frac{1}{2}$ ernsthaft prüfen) und eine Homotopie zwischen f und h .

Wir notieren die Menge aller Homotopieklassen stetiger Abbildungen von X nach Y mit $[X, Y]$.

Definition 5.2.3 Verknüpfung von Klassen

Nun seien $f, g : X \longrightarrow Y$ und $k, l : Y \longrightarrow Z$ zwei Paare homotoper Abbildungen. Dann sind auch $k \circ f$ und $l \circ g$ homotop. Wenn $H : X \times \mathbb{I} \longrightarrow Y$ eine Homotopie

zwischen f und g ist und $M : Y \times \mathbb{I} \longrightarrow Z$ eine Homotopie von k nach l , dann findet sich in

$$N : X \times \mathbb{I} \longrightarrow Z, N(x, t) := M(H(x, t), t),$$

eine Homotopie von $k \circ f$ nach $l \circ g$. Wir erhalten also eine wohldefinierte Verknüpfung

$$[Y, Z] \times [X, Y] \longrightarrow [X, Z], ([k], [f]) \mapsto [k \circ f].$$

Diese Verknüpfung ist natürlich assoziativ (das stimmt ja schon für die Komposition der Vertreter), und es gibt in $[X, X]$ immer ein neutrales Element, nämlich die Homotopieklasse der Identität.

Das heißt: die Klasse der topologischen Räume, ausgestattet mit den Homotopieklassen stetiger Abbildungen, ist eine Kategorie. Diesen Begriff werden wir hier nicht weiter beleuchten, er spielt aber im Hintergrund eine wesentliche Rolle bei allem, was hier passiert.

Definition 5.2.4 Homotopieäquivalenz, Kontrahierbarkeit

a) Zwei topologische Räume X, Y heißen *homotopieäquivalent*, wenn es stetige Abbildungen $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$, gibt, sodass $g \circ f$ zur Identität auf X und $f \circ g$ zur Identität auf Y homotop sind.

Zwei homöomorphe Räume sind offensichtlich homotopieäquivalent. Von daher handelt es sich also um eine Abschwächung dessen, was einen Topologen zunächst interessieren sollte.

Homotopieäquivalenz ist der Isomorphiebegriff in der Homotopiekategorie.

b) Ein topologischer Raum X heißt *kontrahierbar*, falls ein Punkt $x_0 \in X$ existiert, sodass $f = \text{Id}_X$ und die konstante Abbildung $g : X \ni y \mapsto x_0 \in X$ zueinander homotop sind, wenn es also eine Abbildung

$$H : X \times \mathbb{I} \longrightarrow X$$

gibt mit $H(x, 0) = x, H(x, 1) = x_0$ für alle $x \in X$.

Das heißt nichts anderes, als dass X zu $\{x_0\}$ homotopieäquivalent ist.

Ein kontrahierbarer Raum ist insbesondere wegzusammenhängend.

Allerdings ist nicht jeder wegzusammenhängende Raum automatisch kontrahierbar, was diesem neuen Begriff eine gewisse Existenzberechtigung verleiht.

Beispiel 5.2.5 Konvexität, Sterngebiete, die Sphäre

a) Eine Teilmenge von \mathbb{R}^n heißt *konvex*, falls sie mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthält.

- b) Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, falls ein $x_0 \in S$ existiert, sodass für alle $x \in S$ auch die Verbindungsstrecke von x_0 nach x zu S gehört.

Jede konvexe Menge ist sternförmig. Jede sternförmige Menge ist wegzusammenhängend.

Ist S offen und sternförmig, so nennt man es ein *Sterngebiet*. In der Funktionentheorie ist dies ein wichtiger Begriff.

- c) Jede sternförmige Menge ist kontrahierbar. Als Homotopie verwenden wir hier die Abbildung

$$H(x, T) := x_0 + (1 - t) \cdot (x - x_0), \quad x \in S, t \in [0, 1].$$

Tatsächlich landet diese Abbildung in S , sie ist stetig und erfüllt

$$H(x, 0) = x, H(x, 1) = x_0.$$

- d) Jeder zu einer kontrahierbaren Menge homöomorphe Raum ist ebenfalls kontrahierbar.
- e) Nicht kontrahierbar ist zum Beispiel die eindimensionale Sphäre

$$\mathbb{S}^1 := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid |v| = 1\}.$$

Hätte man nämlich eine Kontraktion

$$H : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{S}^1, H|_{\mathbb{S}^1 \times \{0\}} = \text{id}_{\mathbb{S}^1}, H|_{\mathbb{S}^1 \times \{1\}} = \text{const.}$$

so könnte man unter Benutzung der Methoden und der Notation von 5.1.1 eine stetige Abbildung

$$\tilde{H} : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}$$

angeben, die für alle $t \in [0, 1]$ die Gleichung

$$\pi(\tilde{H}(x, t)) = H((\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)), t)$$

erfüllt.

Wieder wäre dann $t \mapsto \tilde{H}(1, t) - \tilde{H}(0, t)$ stetig auf $[0, 1]$ mit ganzzahligen Werten, also konstant, was den Randbedingungen der Kontraktion widerspricht.

Hilfssatz 5.2.6 Alles trivial

Es seien X, Y topologische Räume und Y sei kontrahierbar. Weiter sei $y_0 \in Y$ beliebig.

Dann ist jede stetige Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ homotop zur konstanten Abbildung $g : X \longrightarrow \{y_0\} \subseteq Y$.

Beweis. Es gibt eine Homotopie $H : Y \times \mathbb{I} \longrightarrow Y$ zwischen der Identität und einer konstanten Abbildung h . Da das impliziert, dass Y wegzusammenhängend ist, gibt es auch einen stetigen Weg

$$\gamma : \mathbb{I} \longrightarrow Y, \gamma(0) = h(y_0), \gamma(1) = y_0.$$

Diesen blasen wir zu einer Homotopie auf:

$$K : Y \times \mathbb{I} \longrightarrow Y, K(y, t) := \gamma(t).$$

Das zeigt wegen der Transitivität der Homotopie, dass die Identität zur konstanten Abbildung mit Wert y_0 homotop ist. Sei L eine solche Homotopie. Dann ist

$$\tilde{L} : X \times \mathbb{I} \longrightarrow Y, \tilde{L}(x, t) := L(f(x), t),$$

eine Homotopie zwischen f und der konstanten Abbildung mit Wert y_0 . \circ

Bemerkung 5.2.7 nullhomotop

a) Eine stetige Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt *nullhomotop* oder auch *unwesentlich*, wenn sie zu einer konstanten Abbildung homotop ist.

b) Als Beispiel hierfür nennen wir einen stetigen Weg $\sigma : \mathbb{I} \longrightarrow Y$.

Eine Homotopie von σ zu einem „konstanten Weg“ ist zum Beispiel

$$H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \longrightarrow Y, H(u, t) = \sigma((1 - t)u).$$

In gewisser Weise legt das nahe, dass Homotopie in unserem bisherigen Sinn zu beliebig ist.

c) Es sei wieder $\sigma : \mathbb{I} \longrightarrow Y$ ein stetiger Weg. Dann ist

$$\nu : \mathbb{I} \longrightarrow Y, \nu(u) := \begin{cases} \sigma(2u) & 0 \leq u \leq \frac{1}{2}, \\ \sigma(-2u + 2) & \frac{1}{2} < u \leq 1, \end{cases}$$

ein stetiger Weg, der beim selben Punkt aufhört, wo er anfängt. Diese spezielle Art geschlossener Wege ist in einem schärferen Sinn nullhomotop, als es für jeden Weg ohnehin gilt. Es gibt nämlich sogar eine Homotopie

$$H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \longrightarrow Y$$

zum konstanten Weg $\kappa(u) = \nu(0) = \nu(1)$, die zu jedem „Zeitpunkt“ $t \in \mathbb{I}$ die Randbedingung

$$H(0, t) = H(1, t) = \nu(0)$$

erfüllt. Die Homotopie hält in gewissem Sinn den Anfangs- und Endpunkt des Weges fest.

Dieses Phänomen wird später noch eine Rolle spielen und zunächst in einem allgemeineren Konzept festgehalten.

5.3 Fundamentalgruppen

Definition 5.3.1 punktierte Räume

Es sei X ein topologischer Raum. Durch Auswahl eines Punktes $x_0 \in X$ wird X – oder genauer gesagt das Paar (X, x_0) – zu einem *punktierten Raum*.

Eine Abbildung zwischen zwei punktierten Räumen (X, x_0) und (Y, y_0) ist eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit der Eigenschaft $f(x_0) = y_0$.

Wenn man zwar „punktiert denkt“, dies aber doch nicht an die große Glocke hängen möchte, wird man den speziellen Punkt auch einfach $*$ nennen und in allen punktierten Räumen diese Namen benutzen.

Für Homotopien zwischen Abbildungen zwischen punktierten Räumen wird man sich auch immer wünschen, dass zu jedem „Zeitpunkt“ $t \in \mathbb{I}$ die Abbildung $H(\cdot, t)$ punktiert ist, also

$$\forall t \in \mathbb{I} : H(*, t) = *.$$

Das nennen wir eine *relative Homotopie* – ein Konzept, das sich noch verallgemeinern lässt.

Beispiel: Es sei $\gamma : \mathbb{I} \rightarrow X$ ein stetiger Weg in einem topologischen Raum X . Weiter sei $\varphi : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ stetig mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$. Dann sind γ und $\gamma \circ \varphi$ homotop, eine mögliche Homotopie ist

$$H(x, t) := \gamma((1 - t)x + t\varphi(x)).$$

Diese Homotopie hat den zusätzlichen Reiz, dass für alle $t \in \mathbb{I}$ gilt:

$$H(0, t) = \gamma(0), \quad H(1, t) = \gamma(1).$$

Wenn \mathbb{I} durch 0 punktiert wird und X durch $\gamma(0)$, dann ist diese Homotopie also eine relative Homotopie zwischen γ und $\gamma \circ \varphi$. Genauso auch, wenn \mathbb{I} durch 1 punktiert wird und X durch $\gamma(1)$. Das werden wir nachher noch mehrfach ausnutzen.

Definition 5.3.2 Sphärenklänge

a) Die n -dimensionale Sphäre \mathbb{S}^n ist ab jetzt immer

$$\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x^\top \cdot x = 1\}.$$

Wir punktieren sie durch Auszeichnung des Punktes $* = (1, 0, \dots, 0)^\top$.

b) Für einen punktierten topologischen Raum $(X, *)$ heißt

$$\pi_n(X, *) := [(\mathbb{S}^n, *), (X, *),]$$

die n -te Homotopiemenge. Oft wird in der Notation der Punkt $*$ unterdrückt, aber im Allgemeinen tut man sich und ihm damit keinen Gefallen.

Wir wollen hier nur die Fälle $n = 0$ und $n = 1$ behandeln und die allgemeinere Situation den Homotopietheoretikern überlassen.

Bemerkung 5.3.3 $n = 0$

Für $n = 0$ ist $S^0 = \{-1, +1\}$. Eine stetige Abbildung von S^0 nach $(X, *)$ ist einfach die Vorgabe des Punktes $x = f(-1)$; schließlich muss 1 ja auf $*$ abgebildet werden.

Eine Homotopie zwischen zwei solchen Abbildungen f, g im Sinne von 5.3.1 ist ein Paar stetiger Wege $H(1, t) = *$ und $H(-1, t)$, wobei $H(-1, 0) = f(-1)$ und $H(-1, 1) = g(-1)$.

Alles in allem stellt sich damit heraus, dass es eine sehr naheliegende Identifizierung zwischen $\pi_0(X, *)$ und den Wegzusammenhangskomponenten von X gibt. Eine von diesen Wegzusammenhangskomponenten ist (künstlich) dadurch ausgezeichnet, dass sie $*$ enthält. Dadurch wird $\pi_0(X, *)$ zu einer punktierten Menge.

Bemerkung 5.3.4 Eine Verknüpfung

a) Zunächst bemerken wir, dass wir mithilfe der stetigen und surjektiven Abbildung $\pi : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{S}^1, \pi(u) = (\cos 2\pi u, \sin 2\pi u)$, die eindimensionale Sphäre als Quotientenraum von \mathbb{I} erhalten – wirklich mit der Quotiententopologie, denn \mathbb{I} ist ja kompakt und beide Räume sind hausdorffsch, und daher ist π abgeschlossen. . .

Eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ ist also nichts anderes, als eine stetige Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{I} \rightarrow X$ mit $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1)$.

Eine relative Homotopie zweier solcher Abbildungen von \mathbb{S}^1 nach X bezüglich $(1, 0)$ ist nichts anderes als eine Homotopie zweier Abbildungen $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 : \mathbb{I} \rightarrow X$, wobei auch in der Homotopie $H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow X$ zu jedem Zeitpunkt t ein geschlossener Weg mit Anfang und Ende in $*$ vorliegen soll:

$$\forall t \in \mathbb{I} : H(0, t) = H(1, t) = *.$$

Wir reden dann auch von einer Homotopie *relativ zu* $\{0, 1\} = \partial\mathbb{I} \subset \mathbb{I}$.

Wir können also $\pi_1(X, *) := [(\mathbb{S}^1, *), (X, *)]$ auch mit $[(\mathbb{I}, \partial\mathbb{I}), (X, *)]$ bezeichnen, wobei hier der Rand von \mathbb{I} auf den Punkt $*$ abgebildet wird und die zugelassenen Homotopien dies berücksichtigen.

Nun seien $\gamma, \delta : \mathbb{I} \rightarrow X$ zwei solche Wege mit Anfang und Ende in $*$. Wir verketten sie zu einer neuen geschlossenen Kurve

$$\delta \bullet \gamma : (\mathbb{I}, \partial\mathbb{I}) \rightarrow (X, *), \quad \delta \bullet \gamma(u) := \begin{cases} \delta(2u) & , \text{ falls } 0 \leq u \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma(2u - 1) & , \text{ falls } \frac{1}{2} < u \leq 1. \end{cases}$$

Hierbei nutzen wir aus, dass $\delta(1) = \gamma(0)$, und das ist letztlich für die Stetigkeit an der Nahtstelle $u = \frac{1}{2}$ verantwortlich.

Dummerweise ist im Allgemeinen diese Verknüpfungen weder assoziativ, noch gibt es ein neutrales Element.

Das ändert sich beim Übergang zu den Homotopieklassen.

Man sollte hier (und kann jetzt leicht) nachrechnen, dass durch \bullet tatsächlich eine Verknüpfung auf den Homotopieklassen geschlossener Wege gegeben wird:

Sind $\gamma, \tilde{\gamma}, \delta, \tilde{\delta}$ vier geschlossene Wege, die bei $*$ anfangen und sodass γ zu $\tilde{\gamma}$ und δ zu $\tilde{\delta}$ homotop sind, so sei H eine Homotopie (relativ zu $\partial\mathbb{I}$) von γ zu $\tilde{\gamma}$ und K eine Homotopie von δ zu $\tilde{\delta}$.

Dann ist

$$(H \bullet K)(u, t) := \begin{cases} H(2u, t) & \text{falls } 0 \leq u \leq \frac{1}{2}, \\ K(2u - 1, t) & \text{falls } \frac{1}{2} < u \leq 1, \end{cases}$$

eine Homotopie von $\gamma \bullet \delta$ zu $\tilde{\gamma} \bullet \tilde{\delta}$.

Hilfssatz 5.3.5 Wieso Gruppe?

Es sei $(X, *)$ ein punktierter topologischer Raum. Dann ist $\pi_1(X, *)$ mit der eben definierten Verknüpfung \bullet eine Gruppe.

Beweis. Zunächst zur Assoziativität. Es seien β, γ, δ stetige Abbildungen von $(\mathbb{I}, \partial\mathbb{I})$ nach $(X, *)$.

Dann gilt

$$(\beta \bullet (\gamma \bullet \delta))(u) = \begin{cases} \beta(2u), & \text{falls } 0 \leq u \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma(4u - 2), & \text{falls } \frac{1}{2} < u \leq \frac{3}{4}, \\ \delta(4u - 3), & \text{falls } \frac{3}{4} < u \leq 1, \end{cases}$$

und

$$((\beta \bullet \gamma) \bullet \delta)(u) = \begin{cases} \beta(4u), & \text{falls } 0 \leq u \leq \frac{1}{4}, \\ \gamma(4u - 1), & \text{falls } \frac{1}{4} < u \leq \frac{1}{2}, \\ \delta(2u - 1), & \text{falls } \frac{1}{2} < u \leq 1, \end{cases}$$

Das zeigt, dass für

$$p: \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}, \quad p(u) := \begin{cases} 2u, & \text{falls } 0 \leq u \leq \frac{1}{4}, \\ u + \frac{1}{4}, & \text{falls } \frac{1}{4} < u \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}, & \text{falls } \frac{1}{2} < u \leq 1 \end{cases}$$

die Gleichung

$$(\beta \bullet (\gamma \bullet \delta)) = ((\beta \bullet \gamma) \bullet \delta) \circ p$$

gilt. Mit dem Beispiel aus 5.3.1 sehen wir also die gewünschte Homotopie der beiden verschiedenen Verknüpfungsmöglichkeiten.

Die Klasse der konstanten Kurve $\gamma(z) = *$ ist offensichtlich ein neutrales Element für \bullet , denn zum Beispiel gilt für die geschlossene Kurve $\delta : (\mathbb{I}, \{0, 1\}) \longrightarrow (X, *)$ die Gleichheit $\delta \bullet \gamma = \delta \circ p$ für die Abbildung

$$p : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}, p(u) = \begin{cases} 2u, & 0 \leq u \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} < u \leq 1. \end{cases}$$

Wieder können wir uns auf das Beispiel in 5.3.1 berufen. Ähnlich findet man eine Homotopie zwischen δ und $\gamma \bullet \delta$.

Schließlich rechnet man nach, dass zur geschlossenen Kurve δ stets eine inverse Homotopieklasse gehört, nämlich die der Kurve

$$\overleftarrow{\delta} : \mathbb{I} \longrightarrow X, \overleftarrow{\delta}(x) := \delta(1 - x).$$

Diese Kurve dreht die Richtung von δ einfach um. Setzt man in 5.2.7c) $\sigma = \delta$, so zeigt die Rechnung dort, dass $\nu = \delta \bullet \overleftarrow{\delta}$ nullhomotop relativ zu $\partial\mathbb{I}$ ist, und genauso auch $\overleftarrow{\delta} \bullet \delta$. Also liegen diese Produkte in der Klasse der konstanten Kurve, die das neutrale Element ist. \circ

Definition 5.3.6 Fundamentalgruppe

Die Menge $\pi_1(X, *)$ mit der Verknüpfung \bullet heißt die *Fundamentalgruppe* des punktierten Raums $(X, *)$.

Wir werden in Zukunft für einen Weg $\sigma : \mathbb{I} \rightarrow X$ den *inversen Weg* $\overleftarrow{\sigma}$ durch $u \mapsto \sigma(1 - u)$ definieren. Hierbei bezieht sich „invers“ darauf, dass $\sigma \bullet \overleftarrow{\sigma}$ das neutrale Element in $\pi_1(X, \sigma(0))$ und $\overleftarrow{\sigma} \bullet \sigma$ das neutrale Element in $\pi_1(X, \sigma(1))$ repräsentieren.

Die „Zuordnung“ π_1 , die jedem punktierten topologischen Raum eine Gruppe zuordnet, wird umso wichtiger, wenn man das folgende einsieht:

Hilfssatz 5.3.7 Funktorialität

*Es seien $(X, *)$ und $(Y, *)$ zwei punktierte Räume.*

*Ist $f : (X, *) \longrightarrow (Y, *)$ stetig, so induziert f vermöge der Vorschrift*

$$\gamma \mapsto f \circ \gamma$$

einen Gruppenhomomorphismus

$$\pi_1(f) : \pi_1(X, *) \longrightarrow \pi_1(Y, *).$$

Dieser Gruppenhomomorphismus ist durch die Homotopieklasse von f festgelegt.

*Es gilt $\pi_1(\text{Id}_X) = \text{Id}_{\pi_1(X, *)}$.*

*Ist weiter $(Z, *)$ ein dritter punktierter topologischer Raum und $k : (Y, *) \longrightarrow (Z, *)$ stetig, so gilt*

$$\pi_1(k \circ f) = \pi_1(k) \circ \pi_1(f).$$

Beweis. Wenn γ und δ zwei Repräsentanten von Elementen in $\pi_1(X, *)$ sind, so gilt offensichtlich

$$f \circ (\delta \bullet \gamma) = (f \circ \delta) \bullet (f \circ \gamma).$$

Wegen 5.2.3 liefert dies die gewünschte Homomorphieeigenschaft für die Fundamentalgruppen. (Das Argument dort bleibt in der relativen Situation gültig.)

Derselbe Verweis zeigt, dass zwei homotope Abbildungen f, g denselben Gruppenhomomorphismus zwischen den Fundamentalgruppen induzieren.

Die restlichen Aussagen sind unmittelbare Konsequenzen der Definition von π_1 . ○

Bemerkung 5.3.8 Konsequenzen

Wenn $f : (X, *) \rightarrow (Y, *)$ ein Homöomorphismus ist (es langt auch schon Homotopieäquivalenz), so ist $\pi_1(f)$ ein Isomorphismus zwischen den Fundamentalgruppen. Das zeigt, dass $\pi_1(X, *)$ eine Invariante ist, mit der sich bisweilen verschiedene Räume unterscheiden lassen.

Da wir aber Fundamentalgruppen noch gar nicht sinnvoll berechnen können machen wir erst noch einmal ein Beispiel für die andere Richtung:

Zum Beispiel ist $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zur $n-1$ -dimensionalen Sphäre homotopieäquivalent vermöge der Inklusion $\iota : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und der Normierungsabbildung $N : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}, x \mapsto \frac{x}{|x|}$.

Eine Homotopie zwischen diesen Abbildungen ist etwa

$$H : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{I} \rightarrow S^{n-1}, H(x, t) := (1-t)x + t \frac{x}{|x|}.$$

Damit sieht man dann ein, dass der \mathbb{R}^n für $n \geq 3$ nicht zu \mathbb{R}^2 homöomorph sein kann.

Wäre nämlich $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus, so wäre die Einschränkung

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$$

auch ein Homöomorphismus, und damit wären die 1-Sphäre und die $(n-1)$ -Sphäre homotopieäquivalent. Aber S^1 hat als Fundamentalgruppe gerade \mathbb{Z} - das folgt schnell aus unseren Überlegungen zur Umlaufzahl in 5.1.1. Dagegen ist jeder geschlossene Weg in S^{n-1} für $n \geq 3$ nullhomotop - wir werden in 5.3.13 noch sehen, dass die Fundamentalgruppe trivial ist.

Nun wollen wir uns von der Wahl des Basispunkts soweit unabhängig machen, wie es geht.

Um das schön aufschreiben zu können definieren wir für zwei Wege $\gamma, \delta : \mathbb{I} \rightarrow X$ mit $\gamma(1) = \delta(0)$ den neuen Weg

$$\gamma \bullet \delta : \mathbb{I} \rightarrow X, u \mapsto \begin{cases} \gamma(2u), & 0 \leq u \leq \frac{1}{2}, \\ \delta(2u - 1), & \frac{1}{2} < u \leq 1. \end{cases}$$

Wie vorher überlegt man sich, dass diese Verknüpfung eine schöne Verknüpfung auf den Homotopieklassen von Wegen (relativ zu $\{0, 1\} \subseteq \mathbb{I}$) mit passenden Anfangs- und Endpunkten liefert.

Hilfssatz 5.3.9 zwei Punkte wohnen ach in meinem Raum

Es seien X ein topologischer Raum und x_0, x_1 zwei Punkte in X . Weiter sei $\sigma : \mathbb{I} \rightarrow X$ ein stetiger Weg mit $\sigma(0) = x_0$ und $\sigma(1) = x_1$.

Für einen Weg $\gamma : (\mathbb{I}, \partial\mathbb{I}) \rightarrow (X, x_1)$ setzen wir

$$\Phi([\gamma]) := [\sigma \bullet \gamma \bullet \overleftarrow{\sigma}] \in \pi_1(X, x_0).$$

Dabei ist $\overleftarrow{\sigma}$ wie in 5.3.6 definiert.

Dann ist Φ ein Gruppenisomorphismus von $\pi_1(X, x_1)$ nach $\pi_1(X, x_0)$.

Beweis. Natürlich ist Φ eine Abbildung zwischen den angegebenen Fundamentalgruppen. Wir müssen die Homomorphieeigenschaft zeigen. Dazu seien γ, δ zwei Wege mit Anfangs- und Endpunkt in x_1 . Dazu erinnern wir uns daran, dass der konstante Weg $\nu : \mathbb{I} \rightarrow \{x_1\} \subseteq X$ das neutrale Element in $\pi_1(X, x_1)$ repräsentiert, und dass er homotop ist zu $\overleftarrow{\sigma} \bullet \sigma$

$$\begin{aligned} \Phi([\gamma \bullet \delta]) &= \Phi([\gamma] \bullet [\delta]) \\ &= \Phi([\gamma] \bullet [\nu] \bullet [\delta]) \\ &= [\sigma \bullet \gamma \bullet \overleftarrow{\sigma} \bullet \sigma \bullet \delta \bullet \overleftarrow{\sigma}] \\ &= [\sigma \bullet \gamma \bullet \overleftarrow{\sigma}] \bullet [\sigma \bullet \delta \bullet \overleftarrow{\sigma}] \\ &= \Phi([\gamma]) \bullet \Phi([\delta]). \end{aligned}$$

Dieser Homomorphismus ist bijektiv, denn die inverse Abbildung ist natürlich nichts anderes als

$$[\beta] \mapsto [\overleftarrow{\sigma} \bullet \beta \bullet \sigma].$$

○

Definition 5.3.10 einfach zusammenhängend

Ein topologischer Raum X heißt *einfach zusammenhängend*, wenn er wegzusammenhängend ist und $\pi_1(X, *)$ die triviale Gruppe ist. Der letzte Hilfssatz sagt uns, dass dies nicht vom Punkt $*$ abhängt.

Definition 5.3.11 Retrakte

a) Es seien $A \subseteq X$ topologische Räume. Dann heißt A ein *Retrakt* von X , wenn die Inklusion $\iota : A \rightarrow X$ eine stetige Linksinverse $f : X \rightarrow A$, $f \circ \iota = \text{Id}_A$, besitzt.

Dass es eine mengentheoretische Inverse immer gibt, ist klar. Aber die Stetigkeit erzwingt (nach Wahl eines Punktes $* \in A$)

$$\pi_1(f) \circ \pi_1(\iota) = \text{Id}_{\pi_1(A,*)},$$

also muss insbesondere $\pi_1(\iota)$ injektiv und $\pi_1(f)$ surjektiv sein.

Dies ist beispielsweise für $A = \mathbb{S}^1, X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ nicht möglich, denn X ist kontrahierbar und hat damit triviale Fundamentalgruppe, während \mathbb{S}^1 als Fundamentalgruppe die Gruppe \mathbb{Z} hat.

Allgemein: Wenn $\pi_1(X, *)$ keinen surjektiven Gruppenhomomorphismus nach $\pi_1(A, *)$ hat, dann ist A sicher kein Retrakt von X .

b) Ein Retrakt A von X heißt ein *Deformationsretrakt*, wenn die Abbildungen f und ι zueinander (relativ zu A) homotopieinvers sind.

Wegen $f \circ \iota = \text{Id}_A$ und $\iota \circ f(x) = f(x)$ ist die Homotopieinversität äquivalent zur Existenz einer Homotopie

$$H : X \times \mathbb{I} \rightarrow X, H(x, 0) = f(x), H(x, 1) = x, H(a, t) = a,$$

was für alle $x \in X$ und $a \in A$ gelten soll.

Ein Punkt $a \in X$ ist zum Beispiel immer ein Retrakt von X , denn konstante Abbildungen sind stetig. Ein Deformationsretrakt von X ist aber höchstens dann einelementig, wenn X kontrahierbar ist.

Hilfssatz 5.3.12 Die einfache Hälfte von Seifert¹ - van Kampen²

Es seien $(X, *)$ ein punktierter Raum, $X = U \cup V$ eine offene Überdeckung, wobei $U \cap V$ wegzusammenhängend sei und den Basispunkt $*$ enthalte.

Dann wird $\pi_1(X, *)$ erzeugt von den Klassen der geschlossenen Kurven, die bei $*$ beginnen und aufhören und ausschließlich in U oder in V verlaufen.

Beweis.

Es sei $\gamma : (\mathbb{I}, \partial\mathbb{I}) \rightarrow (X, *)$ ein geschlossener Weg. Die Zusammenhangskomponenten von $\gamma^{-1}(U)$ und $\gamma^{-1}(V)$ sind eine offene Überdeckung des Kompaktums

¹Karl Johann Herbert Seifert, 1907-1996

²Egbert Rudolf van Kampen, 1908-1942

\mathbb{I} , also braucht man nur endlich viele davon. Daher gibt es eine Lebesgue³-Zahl $\varepsilon > 0$, d.h. es gilt

$$\forall t \in \mathbb{I} : \gamma((t - \varepsilon, t + \varepsilon) \cap \mathbb{I}) \subseteq U \text{ oder } \subseteq V.$$

Es gibt also „Zeitpunkte“ $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$, sodass für $1 \leq i \leq k$ die Kurve $\gamma_i(t) := \gamma(t)$ für $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ ganz in U oder V verläuft. Wir setzen $T_i = U$ oder V , je nachdem, wo das Bild von γ_i landet.

Dann ist

$$\gamma = \gamma_1 \bullet \gamma_2 \bullet \dots \bullet \gamma_k.$$

Nun muss man noch dafür sorgen, dass die Wege γ_i hier durch geschlossene Wege in den U bzw. V ersetzt werden können. Dazu wählen wir für $1 \leq i \leq k - 1$ einen Weg

$$\sigma_i : \mathbb{I} \rightarrow U \cap V,$$

der $\sigma_i(0) := \gamma_i(1) = \gamma_{i+1}(0) \in U \cap V$ mit $\sigma_i(1) := *$ verbindet. Genau an dieser Stelle brauchen wir, dass dieser Durchschnitt wegzusammenhängend ist.

Dann ist γ homotop zu

$$\underbrace{\gamma_1 \bullet \sigma_1}_{\text{in } T_1} \bullet \overleftarrow{\sigma_1} \bullet \underbrace{\gamma_2 \bullet \sigma_2}_{\text{in } T_2} \bullet \overleftarrow{\sigma_2} \bullet \dots \bullet \overleftarrow{\sigma_{k-1}} \bullet \underbrace{\gamma_k}_{\text{in } T_k},$$

und dies ist nun ein Produkt von geschlossenen Wegen in den $T_1, \dots, T_k \in \{U, V\}$.

○

Bemerkung 5.3.13 konsequent

a) Insbesondere sagt dieser Hilfssatz, dass X einfach zusammenhängend ist, wenn U und V diese Eigenschaft besitzen.

b) Ein **Beispiel** für diesen Sachverhalt ist die n -dimensionale Sphäre \mathbb{S}^n , $n \geq 2$. Denn wenn P, Q zwei verschiedene Punkte in \mathbb{S}^n sind, dann sind $U_1 := \mathbb{S}^n \setminus \{P\}$ und $U_2 := \mathbb{S}^n \setminus \{Q\}$ wegzusammenhängend, und ihr Durchschnitt auch (wegen $n \geq 2$).

Nun ist aber $\mathbb{S}^n \setminus \{P\}$ homöomorph zu \mathbb{R}^n , und zwar vermöge der stereographischen Projektion. Da \mathbb{R}^n kontrahierbar ist, gilt dies also auch für U_1 und U_2 , und daher haben diese triviale Fundamentalgruppen (egal welchen Fußpunkt man wählt). Daher ist auch $\pi_1(\mathbb{S}^n)$ trivial.

Folgerung 5.3.14 Das Komplement einer geschlossenen Jordankurve

Es sei $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine geschlossene Jordankurve.

Dann ist $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma^*$ nicht zusammenhängend.

³Henri Leon Lebesgue, 1875-1941

Beweis. Mithilfe der stereographischen Projektion können wir γ^* zunächst als Jordankurve in \mathbb{S}^2 auffassen (ohne die Anzahl der Zusammenhangskomponenten im Komplement zu ändern) und dann wieder von einem Punkt auf der Bildkurve zurückprojizieren, sodass γ^* ersetzt wird durch einen Homöomorphismus von \mathbb{R} auf eine Kurve in \mathbb{R}^2 , die beidseitig nach Unendlich läuft, das heißt: anstatt γ zu betrachten, betrachten wir eine injektive Kurve

$$\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \forall R > 0 : \exists T > 0 : \forall x : [|x| > T \Rightarrow \|\lambda(x)\| > R.$$

Wir müssen zeigen, dass das Bild λ^* dieser Kurve die Ebene in (mindestens) zwei Teile zerlegt.

Um das zu bewerkstelligen legen wir die Ebene \mathbb{R}^2 als x - y -Ebene in den \mathbb{R}^3 und betrachten darin die Teilmengen

$$\begin{aligned} O &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > -1, [z \leq 0 \Rightarrow (x, y) \notin \lambda^*]\} \\ U &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 1, [z \geq 0 \Rightarrow (x, y) \notin \lambda^*]\}. \end{aligned}$$

Dann ist $O \cup U = \mathbb{R}^3 \setminus \lambda^*$ und $O \cap U = (\mathbb{R}^2 \setminus \lambda^*) \times (-1, 1)$, was nach Voraussetzung wegzusammenhängend ist. O und H sind kontrahierbar, also haben sie triviale Fundamentalgruppe. Daher ist nach dem letzten Hilfssatz auch $O \cup U$ einfach zusammenhängend.

Wir werden im nächsten Hilfssatz zeigen, dass dies nicht stimmt, denn $\mathbb{R}^3 \setminus \lambda^*$ ist homotop zum Einheitskreis. Damit haben wir einen Widerspruch zur Annahme, $\mathbb{R}^2 \setminus \lambda^*$ sei zusammenhängend. \circ

Hilfssatz 5.3.15 Ein Homöomorphismus und eine Homotopie

In der Situation von oben gibt es einen Homöomorphismus

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

sodass $\Phi(\lambda^*) = \mathbb{R} \cdot (0 \ 0 \ 1)$.

Das Komplement $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R} \cdot (0 \ 0 \ 1)$ ist homotopieäquivalent zu \mathbb{S}^1 .

Beweis. Die Menge

$$L := \{(\lambda(t), t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

liegt „über“ λ^* und ist dazu homöomorph. Sie enthält aus jeder zu \mathbb{R}^2 parallelen Ebene genau einen Punkt.

Da λ^* wegen der Unbeschränktheitsbedingung abgeschlossen ist, können wir die Inverse von $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \lambda^*$ mit dem Erweiterungssatz von Tietze zu einer Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen und definieren dann

$$\Psi_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x, y, z + F(x, y)).$$

Das ist ein Homöomorphismus, der λ^* mit L identifiziert.

Schließlich sei

$$\Psi_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (x - \lambda_1(z), y - \lambda_2(z), z).$$

Auch dies ist ein Homöomorphismus, und er schickt L auf die z -Achse.

Dann ist $\Psi_2 \circ \Psi_1$ ein Homöomorphismus von \mathbb{R}^3 , der λ^* auf die z -Achse schickt.

Die erwähnte Homotopieäquivalenz lassen wir zur Übung. \circ

Als nächstes wollen wir besser verstehen, wie sich die Fundamentalgruppe von X aus denen der „Bausteine“ U und V zusammensetzt. Für die Notation ist es bequemer, diese Teile in U_1 und U_2 umzubenennen.

Satz 5.3.16 Seifert - van Kampen

Es seien X ein wegzusammenhängender Raum, $U_1, U_2 \subseteq X$ offen und wegzusammenhängend, sodass $X = U_1 \cup U_2$ gilt, und $ \in U_3 := U_1 \cap U_2$. Auch U_3 sei wegzusammenhängend. Zu den Inklusionen von U_3 nach U_1, U_2 gehören Homomorphismen*

$$\nu_i : \pi_1(U_3, *) \rightarrow \pi_1(U_i, *), \quad i = 1, 2.$$

Zu den Inklusionen von U_j nach X gehören Homomorphismen

$$\mu_j : \pi_1(U_j, *) \rightarrow \pi_1(X, *), \quad 1 \leq j \leq 3.$$

Offensichtlich gilt hierbei $\mu_3 = \mu_i \circ \nu_i$, $i = 1, 2$.

*Es seien weiter H eine beliebige Gruppe, und $\rho_j : \pi_1(U_j, *) \rightarrow H$ Gruppenhomomorphismen mit der Eigenschaft*

$$\rho_3 = \rho_i \circ \nu_i, \quad i = 1, 2.$$

*Dann gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\rho : \pi_1(X, *) \rightarrow H$, sodass*

$$\rho_j = \rho \circ \mu_j, \quad 1 \leq j \leq 3.$$

Beweis. Die Eindeutigkeit von ρ ist klar, denn durch die Gleichung, die erfüllt sein soll, liegt ρ auf den Bildern von μ_1 und μ_2 fest, und diese Bilder erzeugen nach dem letzten Hilfssatz die ganze Fundamentalgruppe $\pi_1(X, *)$.

Für die Existenz nehmen wir uns einen geschlossenen Weg $\gamma : (\mathbb{I}, \partial\mathbb{I}) \rightarrow (X, *)$ und schreiben seine Klasse in der Fundamentalgruppe als

$$[\gamma] = [\gamma_1] \bullet \dots \bullet [\gamma_k],$$

wobei die γ_i alle in U_1 bzw. U_2 laufen. Wenn hierbei γ_i in U_{λ_i} läuft ($\lambda_i = 1$ oder 2), dann definieren wir

$$\rho([\gamma]) := \rho_{\lambda_1}([\gamma_1]_{U_{\lambda_1}}) \cdot \dots \cdot \rho_{\lambda_k}([\gamma_k]_{U_{\lambda_k}}).$$

Wir werden in den nächsten Hilfssätzen noch sicherstellen, dass das wohldefiniert ist, und dann ist ρ ein Gruppenhomomorphismus, der unsere Anforderungen erfüllt. \circ

Bemerkung 5.3.17 Zur Bedeutung des Satzes

Durch die Eigenschaft von $\pi_1(X, *)$ ist diese Gruppe bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt.

Um das einzusehen, stellen wir zunächst fest, dass der einzige Endomorphismus φ von $\pi_1(X, *)$, der die Bedingung

$$\varphi \circ \mu_j = \mu_j, \quad 1 \leq j \leq 3,$$

erfüllt, die Identität ist.

Zum Beweis setzen wir in der Eigenschaft aus dem Satz einfach $H = \pi_1(X, *)$ und $\rho_j = \mu_j$. Dann gibt es genau einen Endomorphismus ρ , der

$$\rho_j = \rho \circ \mu_j, \quad 1 \leq j \leq 3$$

erfüllt; die Identität tut dies offensichtlich und die Eindeutigkeit sagt dann $\rho = \text{Id}$.

Wenn nun G eine weitere Gruppe ist, mit Homomorphismen $\psi_j : \pi_1(U_j, *) \rightarrow G$, sodass $\psi_i \circ \nu_i = \psi_3, i = 1, 2$, und wenn für dieses Datum dieselbe Aussage wie für die Fundamentalgruppe gilt, dann gibt es eindeutige Homomorphismen

$$\rho : \pi_1(X, *) \rightarrow G, \quad \tilde{\rho} : G \rightarrow \pi_1(X, *),$$

sodass

$$\psi_j = \rho \circ \mu_j \quad \text{und} \quad \mu_j = \tilde{\rho} \circ \psi_j, \quad 1 \leq j \leq 3.$$

Dann ist aber wegen der ersten Einsicht $\tilde{\rho} \circ \rho$ die Identität auf $\pi_1(X, *)$ und analog ist auch $\rho \circ \tilde{\rho}$ die Identität auf G .

Damit sind ρ und $\tilde{\rho}$ zueinander inverse Gruppenhomomorphismen, die Gruppen also isomorph.

Wir werden später noch Beispiele sehen, in denen der Satz tatsächlich hilft, Fundamentalgruppen zu berechnen.

Im Weiteren fixieren wir die Notation des Satzes von Seifert und van Kampen.

Hilfssatz 5.3.18 Ein Spezialfall

Wenn $\gamma : (\mathbb{I}, \partial\mathbb{I}) \rightarrow (U_3, *)$ ein geschlossener Weg ist, dann gilt

$$\rho_1([\gamma]_{U_1}) = \rho_2([\gamma]_{U_2}).$$

Beweis. Die linke Seite ist nach Definition von ν_1 und wegen $\rho_3 = \rho_1 \circ \nu_1$

$$\rho_1([\gamma]_{U_1}) = \rho_1(\nu_1([\gamma]_{U_3})) = \rho_3([\gamma]_{U_3}).$$

Dasselbe gilt mutatis mutandis für die rechte Seite. ○

Hilfssatz 5.3.19 Eine Umklappung

Es seien $Q := \mathbb{I} \times \mathbb{I}$ und

$$\begin{aligned} \delta_1 : \mathbb{I} &\rightarrow Q, & \delta_1(u) &= \begin{cases} (2u, 0) & 0 \leq u \leq \frac{1}{2}, \\ (1, 2u - 1) & \frac{1}{2} \leq u \leq 1, \end{cases} \\ \delta_2 : \mathbb{I} &\rightarrow Q, & \delta_2(u) &= \begin{cases} (0, 2u) & 0 \leq u \leq \frac{1}{2}, \\ (2u - 1, 1) & \frac{1}{2} \leq u \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

zwei Wege von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$.

Dann sind δ_1 und δ_2 homotop relativ zu $\partial\mathbb{I}$.

Beweis. Die Homotopie

$$H(u, t) := (1 - t)\delta_1(u) + t\delta_2(u)$$

leistet das Gewünschte. ○

Hilfssatz 5.3.20 Die Hauptlast der Wohldefiniertheit

Es seien $k \in \mathbb{N}$, $i_l \in \{1, 2\}$ für $1 \leq l \leq k$, und

$$\gamma_l : (\mathbb{I}, \partial\mathbb{I}) \rightarrow (U_{i_l}, *), \quad 1 \leq l \leq k,$$

derart dass $\gamma_1 \bullet \dots \bullet \gamma_k$ in $\pi_1(X, *)$ das neutrale Element repräsentiert.

Dann gilt in H

$$\rho_{i_1}([\gamma_1]_{U_{i_1}}) \cdot \dots \cdot \rho_{i_k}([\gamma_k]_{U_{i_k}}) = 1.$$

Beweis. Wir repräsentieren die Homotopieklasse von $\gamma_1 \bullet \dots \bullet \gamma_k$ durch den Weg

$$\gamma : \mathbb{I} \rightarrow X, \quad \gamma(u) := \gamma_i(ku + 1 - i), \quad \frac{i-1}{k} \leq u \leq \frac{i}{k}.$$

Es gibt eine Homotopie $H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow X$ derart, dass für alle $u, t \in \mathbb{I}$ die folgenden Aussagen gelten:

$$H(u, 0) = \gamma(u), \quad H(u, 1) = *, \quad H(0, t) = H(1, t) = *$$

Das ist ja gerade eine Homotopie von γ zum konstanten Weg, die relativ zum Rand von \mathbb{I} ist.

$H^{-1}(U_1)$ und $H^{-1}(U_2)$ sind offene Mengen, die $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ überdecken. Wir wählen eine Lebesguezahl $\varepsilon > 0$ für diese Überdeckung. Dann gilt für jedes Paar $(u, t) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I}$, dass $B_\varepsilon((u, t)) \cap \mathbb{I} \times \mathbb{I}$ ganz in $H^{-1}(U_1)$ oder $H^{-1}(U_2)$ enthalten ist.

Nun sei $m \in \mathbb{N}$ ein Vielfaches von k , sodass $\frac{2}{m^2} < \varepsilon^2$.

Weiter seien für $0 \leq i \leq m$ die Zahlen $u_i = t_i = \frac{i}{m}$ definiert.

Wir betrachten für $0 \leq i, j \leq m$ die Punkte $v_{i,j} := (u_i, t_j)$, die Intervalle $J_i := [u_{i-1}, u_i]$, $K_j := [t_{j-1}, t_j]$, die verschobenen Intervalle $a_{i,j} := J_i \times \{t_j\}$, $b_{i,j} = \{u_i\} \times K_j$ und die dadurch entstehenden Quadrate $R_{i,j} := J_i \times K_j$.

Diese Quadrate pflastern für $1 \leq i, j \leq m$ das Quadrat $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$, und der Durchmesser eines jeden $R_{i,j}$ ist nach Wahl von m kleiner als ε .

Daher ist $H(R_{i,j})$ ganz in einem $U_{\lambda(i,j)}$ enthalten, wobei wir ab jetzt $\lambda(i, j) \in \{1, 2\}$ fest gewählt haben, sodass es diese Bedingung erfüllt.

Schließlich wählen wir noch Wege $\sigma_{i,j}$ von $*$ nach $H(v_{i,j})$, wobei der Weg in U_3 laufen soll, wenn $H(v_{i,j}) \in U_3$, und ansonsten in $U_{\lambda(i,j)}$, das dann ja die einzige Wahl von U_1, U_2, U_3 ist, die $H(v_{i,j})$ enthält.

Im Fall $H(v_{i,j}) = *$ soll $\sigma_{i,j}$ der konstante Weg sein; das brauchen wir später insbesondere für $i \in \{0, m\}$ oder $j = m$.

Jetzt seien

$$A_{i,j}(u) = H(u, t_j), \quad u \in J_i,$$

und

$$B_{i,j}(t) = H(u_i, t), \quad t \in K_j,$$

die Bildkurven von $a_{i,j}$ bzw. $b_{i,j}$ unter H .

(Spätestens jetzt verabschieden wir uns von der Konvention, Kurven immer durch das Einheitsintervall zu parametrisieren. Wir verwenden die Verknüpfung \bullet auch für anders parametrisierte Wege oder ihre Homotopieklassen in naheliegender Weise.)

Dann sind $\sigma_{i-1,j} \bullet A_{i,j} \bullet \overleftarrow{\sigma}_{i,j}$ und $\sigma_{i,j-1} \bullet B_{i,j} \bullet \overleftarrow{\sigma}_{i,j}$ geschlossene Wege, die ganz in $U_{\lambda(i,j)}$ verlaufen. Sowohl $A_{i,j}$ als auch $B_{i,j}$ tun das ohnehin, und bei der Wahl von $\sigma_{i,j}$ waren wir vorsichtig genug: Liegt $H(v_{i,j})$ in U_3 , dann laufen wir in U_3 nach $*$ also insbesondere auch in U_2 oder U_1 . Liegt $H(v_{i,j})$ in $U_1 \setminus U_2$, so ist $\lambda_{i,j} = 1$, und wir bleiben mit $\sigma_{i,j}$ darin. Analog können wir mit $\sigma_{i,j-1}$ und $\sigma_{i-1,j}$ argumentieren, denn $v_{i,j-1}, v_{i-1,j} \in R_{\lambda(i,j)}$.

Nun sehen wir uns $\alpha_{i,j} := \rho_{\lambda(i,j)}(\sigma_{i-1,j} \bullet A_{i,j} \bullet \overleftarrow{\sigma}_{i,j})$ und $\beta_{i,j} := \rho_{\lambda(i,j)}(\sigma_{i,j-1} \bullet B_{i,j} \bullet \overleftarrow{\sigma}_{i,j})$ an.

Die Wege

$$A_{i,j-1} \bullet B_{i,j} \quad \text{und} \quad B_{i-1,j} \bullet A_{i,j}$$

sind wegen Lemma 5.3.19 homotop (als Bilder von homotopen Wegen in $J_i \times K_j$),

und damit sind auch die Wege

$$\sigma_{i-1,j-1} \bullet B_{i-1,j} \bullet \overleftarrow{\sigma}_{i-1,j} \bullet \sigma_{i-1,j} \bullet A_{i,j} \bullet \overleftarrow{\sigma}_{i,j}$$

und

$$\sigma_{i-1,j-1} \bullet A_{i,j-1} \bullet \overleftarrow{\sigma}_{i,j-1} \bullet \sigma_{i,j-1} \bullet B_{i,j} \bullet \overleftarrow{\sigma}_{i,j}$$

homotop. Unter Anwendung von $\rho_{\lambda(i,j)}$ und wegen Lemma 5.3.18 folgt die wichtige Beziehung

$$\alpha_{i,j-1}\beta_{i,j} = \beta_{i-1,j}\alpha_{i,j}.$$

Diese benutzen wir jetzt, um einzusehen, dass für $1 \leq j \leq m$ folgendes gilt:

$$\begin{aligned} & \alpha_{1,j-1}\alpha_{2,j-1} \cdots \alpha_{m-1,j-1}\alpha_{m,j-1} \\ = & \alpha_{1,j-1}\alpha_{2,j-1} \cdots \alpha_{m-1,j-1}\alpha_{m,j-1}\beta_{m,j} \\ = & \alpha_{1,j-1}\alpha_{2,j-1} \cdots \alpha_{m-1,j-1}\beta_{m-1,j}\alpha_{m,j} \\ = & \alpha_{1,j-1}\alpha_{2,j-1} \cdots \beta_{m-2,j}\alpha_{m-1,j}\alpha_{m,j} \\ = & \cdots \\ = & \beta_{0,j}\alpha_{1,j}\alpha_{2,j} \cdots \alpha_{m-1,j}\alpha_{m,j} \\ = & \alpha_{1,j}\alpha_{2,j} \cdots \alpha_{m-1,j}\alpha_{m,j} \end{aligned}$$

Hierbei benutzen wir insbesondere, dass wegen der Wahl der $\sigma_{m,j}$ und $\sigma_{0,j}$, die ja konstant gleich $*$ sind, die Elemente $\beta_{m,j}$ und $\beta_{0,j}$ alle 1 sind.

Das führt letztlich zu

$$\alpha_{1,0} \cdot \alpha_{2,0} \cdot \cdots \cdot \alpha_{m,0} = \alpha_{1,m} \cdot \alpha_{2,m} \cdot \cdots \cdot \alpha_{m,m}.$$

Rechter Hand steht aber 1, da alle beteiligten Wege konstant sind. Linker Hand steht das, wofür wir uns interessieren, denn

$$\gamma_l \simeq A_{(l-1)\frac{m}{k}+1} \bullet \simeq A_{(l-1)\frac{m}{k}+2} \bullet \cdots \bullet A_{l\frac{m}{k}}$$

führt zu

$$\rho_{i_l}([\gamma_l]) = \alpha_{(l-1)\frac{m}{k}+1} \cdot \alpha_{(l-1)\frac{m}{k}+2} \cdot \cdots \cdot \alpha_{l\frac{m}{k}},$$

denn alle rechts benutzten Wege laufen in U_{i_l} , und so können wir stets – wegen 5.3.18 – ρ_{i_l} zur Bestimmung von α_{\dots} benutzen, was ein Gruppenhomomorphismus ist. \circ

Bemerkung 5.3.21 Eine Anwendung

a) Wenn $\pi_1(U_3, *)$ trivial ist, dann sagt der Satz von Seifert und van Kampen, dass $\pi_1(X, *)$ das freie Produkt von $\pi_1(U_1, *)$ und $\pi_1(U_2, *)$ ist. Es wird von diesen Gruppen erzeugt, und zwischen den Erzeugern gibt es keine Relationen, die nicht schon in $\pi_1(U_1, *)$ oder $\pi_1(U_2, *)$ zu sehen wären. Insbesondere sind μ_1 und μ_2 injektiv.

b) Eine Anwendung hiervon ist die Fundamentalgruppe eines zusammenhängenden endlichen Graphen, den wir uns als topologischen Raum vorstellen, indem wir jede Kante durch eine Kopie von \mathbb{I} ersetzen.

Genauer besteht ein (gerichteter, endlicher) Graph $G = (E, K, o, t)$ aus einer Menge E von „Ecken“, einer Menge $K = \{\kappa_1, \dots, \kappa_k\}$ von „Kanten“ und zwei Abbildungen $a, e : K \rightarrow E$, die jeder Kante eine Anfangsecke und eine Endecke zuordnen.

Wir ersetzen dies durch einen topologischen Raum, indem wir für jede Kante κ_i eine Kopie $\mathbb{I} \times \{i\}$ des Einheitsintervalls hernehmen und die disjunkte Vereinigung dieser Intervalle durch Verklebung übereinstimmender Anfangs- oder Endpunkte zusammenbringen.

Es sei k die Anzahl der Kanten und e die Anzahl der Ecken des Graphen.

Dann ist der Graph ein Quotientenraum von $\mathbb{I} \times \{1, 2, \dots, k\}$ vermöge einer Abbildung, die das Intervall $\mathbb{I} \times \{j\}$ mit der j -ten Kante identifiziert.

Wenn nun eine Kante zwei verschiedene Ecken verbindet, kann man sie kontrahieren, ohne dabei den Homotopietyp des Graphen zu ändern. Das kann man immer und immer wieder machen, bis man – der Graph soll ja endlich und zusammenhängend sein – bei einem Graph mit nur einem Eck ankommt. Da man dabei immer gleichzeitig eine Kante und eine Ecke „vernichtet“, ändert sich die Differenz deren Kardinalitäten nicht, und am Ende bleibt ein Graph übrig, der eine Ecke und $k - e + 1$ Kanten hat. Das ist der Homotopietyp des alten Graphen, mehr sieht die Homotopie nicht.

c) Was ist dann die Fundamentalgruppe? Wenn G ein Graph mit einer Ecke $*$ und k Kanten K_1, \dots, K_k ist, dann unterscheiden wir zwei Fälle.

$k = 1$. Hier ist G ein Kreis und hat \mathbb{Z} als Fundamentalgruppe.

$k \geq 2$. Hier überdecken wir G mit folgenden offenen Mengen U_1, U_2 . U_1 entstehe aus G durch entfernen eines Punktes $\neq *$ der Kante K_k , und U_2 durch entfernen je eines Punktes $\neq *$ aus den übrigen Kanten K_1, \dots, K_{k-1} . Dann sind $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ wegzusammenhängend. Durch zusammenziehen der beiden Schnippsel von K_k ist U_1 homotop zum Graphen mit den Kanten K_1, \dots, K_{k-1} , U_2 homotop zum Graphen mit der Kante K_k und $U_1 \cap U_2$ kontrahierbar. Folglich ist $\pi_1(G, *)$ das freie Produkt der Fundamentalgruppe eines Graphen mit einer Ecke und $k - 1$ Kanten und der Fundamentalgruppe eines Kreises.

Induktiv zeigt das, dass $\pi_1(G, *)$ eine freie Gruppe in $k - e + 1$ Erzeugern ist. Die Größe $e - k$ heißt die *Eulercharakteristik* des zusammenhängenden Graphen G .

„Freiheit“ der Gruppe bezüglich der Erzeuger heißt, dass ein Homomorphismus von $\pi_1(G, *)$ in eine beliebige Gruppe Γ durch vollkommen beliebige Vorgabe der Bilder der Erzeuger definieren lässt.

Folgerung 5.3.22 Ein Klassifikationssatz

Es sei X eine Sphäre mit n Henkeln. Dann gibt es Erzeuger $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ von $\pi_1(X)$, sodass jede Relation zwischen den Erzeugern sich aus der einen Relation

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} = 1$$

ergibt.

Das heißt: Ein Homomorphismus von $\pi_1(X)$ in eine beliebige Gruppe Γ wird durch die Bilder von a_1, \dots, b_n gegeben, und hier muss man nur dafür sorgen, dass die Bilder dieselbe Relation erfüllen.

Ist Y eine Sphäre mit m Henkeln und gibt es einen Homöomorphismus von Y nach X , so gilt $m = n$.

Beweis. Wir denken uns die Fläche X als das Ergebnis des Prozesses aus 4.3.6. Nun überdecken wir das $4n$ -Eck durch eine offene Kreisscheibe U und das Komplement V einer etwas kleineren abgeschlossenen Kreisscheibe, sodass $U \cap V$ ein offener Kreisring ist. Dieser ist wegzusammenhängend und wir wählen als Basispunkt einen Punkt in diesem Kreisring.

Bei den Randidentifikationen wird U injektiv nach X abgebildet, während alles relevante in V passiert. V jedoch ist homotop zum Rand von V , der aus den Wegen $a_1, b_1, a_1^*, b_1^*, \dots$ besteht. In X wird aufgrund der Verklebevorschriften aus diesen Wegen ein Graph mit einer Ecke und $2n$ Kanten, und demnach (s.o.) hat das Bild von V in X eine freie Fundamentalgruppe mit $2n$ Erzeugern.

Der Satz von Seifert und Van Kampen liefert dann gerade die erste Behauptung, da der Weg $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$ nullhomotop ist (und homotop zum Erzeuger der Fundamentalgruppe von $U \cap V$).

Es gibt einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von $\pi_1(X)$ nach \mathbb{Z}^{2n} , der dadurch zustande kommt, dass man die Erzeuger a_1, \dots, b_n sukzessive auf die Standardbasis von \mathbb{Z}^{2n} abbildet und dies zu einem Gruppenhomomorphismus fortsetzt. Die Relation zwischen den Erzeugern von $\pi_1(X)$ wird hierbei respektiert, da \mathbb{Z}^{2n} ja abelsch ist.

Wenn nun Y und X homöomorph sind, so sind ihre Fundamentalgruppen isomorph, und daher gibt es auch einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von $\pi_1(Y)$ nach \mathbb{Z}^{2n} . Da $\pi_1(Y)$ von $2m$ Elementen erzeugt wird, deren Bilder auch \mathbb{Z}^{2n} erzeugen, muss $m \geq n$ gelten. Aus Symmetriegründen gilt auch $n \geq m$ und damit $n = m$ wie behauptet. \circ

Definition 5.3.23 Geschlecht

Es sei X eine orientierte Fläche. Dann ist X eine Sphäre mit n Henkeln, und wir haben gerade gesehen, dass n eindeutig durch X festgelegt wird. Man nennt n das *Geschlecht* von X .

Bemerkung 5.3.24 Mannigfaltigkeiten

a) Ist M eine kompakte, zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension n , so ist die Fundamentalgruppe von M endlich erzeugt.

Ein Argument hierfür geht wie folgt: jeder Punkt von M hat eine Umgebung, die homöomorph zu einer offenen Kugel vom Radius 1 in \mathbb{R}^n ist.

Überdecke M durch endlich viele solcher Kugeln U_1, \dots, U_k , und glaube dabei, dass es möglich ist, dies so einzurichten, dass die Durchschnitte $U_i \cap U_j$, $1 \leq i, j \leq k$ zusammenhängend sind.

Wähle im Fall $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ einen Punkt $Q_{i,j}$ in diesem Durchschnitt sowie einen Weg $\kappa_{i,j}$ von P_i nach $Q_{i,j}$. Richte dies so ein, dass erstens $Q_{i,j} = Q_{j,i}$ gilt, und dass $Q_{i,i} = P_i$ gilt sowie $\kappa_{i,i}$ konstant ist.

Wähle OBdA $* = P_1$.

Wenn nun $\gamma : (\mathbb{I}, \partial\mathbb{I}) \rightarrow (M, *)$ ein Weg ist, so wähle dazu ein $m \in \mathbb{N}$, sodass jede Kurve

$$\gamma_l := \gamma|_{[\frac{l-1}{m}, \frac{l}{m}]}, \quad 1 \leq l \leq m,$$

ihr Bild ganz in einem U_{i_l} hat, wobei $i_l \in \{1, \dots, k\}$.

Da es in bewährter Weise einen Verbindungsweg σ_l von $\gamma(\frac{l}{m})$ nach $Q_{i_l, i_{l+1}}$ gibt, der ganz in $U_{i_l} \cap U_{i_{l+1}}$, verläuft, ist γ homotop zu

$$\gamma_1 \bullet \sigma_1 \bullet \overleftarrow{\sigma_1} \bullet \gamma_2 \bullet \dots \bullet \overleftarrow{\sigma_{m-1}} \bullet \gamma_m.$$

Da hierbei

$$\overleftarrow{\sigma_{l-1}} \bullet \gamma_l \bullet \sigma_l$$

zum Weg

$$\overleftarrow{\kappa_{i_l, i_{l-1}}} \bullet \kappa_{i_l, i_{l+1}}$$

homotop ist (alles läuft in U_{i_l} , und das ist kontrahierbar), ist letztlich γ homotop zu einem „Kantenzug“ auf dem Graphen mit Ecken P_i , $Q_{i,j}$ (sofern existent) und Kanten $\kappa_{i,j}$ (sofern existent).

Also ist $\pi_1(M, *)$ das Bild von der Fundamentalgruppe dieses Graphen unter der Inklusion des Graphen. Aber die Fundamentalgruppe eines endlichen Graphen ist endlich erzeugt, und das gilt dann auch für ihr Bild.

b)

Es lässt sich zeigen, dass jede endlich erzeugte Gruppe, die durch endlich viele Relationen zwischen ihren Erzeugern charakterisiert werden kann (eine *endlich präsentierte* Gruppe also), als Fundamentalgruppe einer kompakten vierdimensionalen Mannigfaltigkeit vorkommt.

Um das zu zeigen (siehe z.B. W.S. Massey: *Algebraic Topology: An Introduction*; Springer 1987, Seiten 143 f.), „verklebt“ man zunächst zwei Kopien von $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$

(was Fundamentalgruppe \mathbb{Z} hat) durch Ausschneiden je einer 4-dimensionalen Kugel und Verkleben längs des Randes dieser Kugel. Da die Kugel und ihr Rand \mathbb{S}^3 einfach zusammenhängend sind, ist die Fundamentalgruppe von $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \setminus$ (kleine Kugel) immer noch \mathbb{Z} , und die Fundamentalgruppe des durch Verklebung entstandenen Objekts ist frei in 2 Erzeugern. Für beides braucht man Seifert - van Kampen.

Falls die gewünschte Gruppe 3 Erzeuger hat, klebt man noch eine Kopie von $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ an, und das wiederholt man so oft, bis man die gewünschte Anzahl von Erzeugern in der Fundamentalgruppe hat.

Ist das erreicht, muss man weitere Bausteine einkleben, die Relationen zwischen den Erzeugern implizieren, aber den Mannigfaltigkeitscharakter nicht verändern.

5.4 Überlagerungen

Definition 5.4.1 Lokalkolorit

- a) Ein topologischer Raum X heißt *lokal zusammenhängend*, wenn jedes $x \in X$ eine Umgebungsbasis aus zusammenhängenden offenen Umgebungen besitzt.
- b) Ein topologischer Raum X heißt *lokal wegzusammenhängend*, wenn jedes $x \in X$ eine Umgebungsbasis aus wegzusammenhängenden offenen Umgebungen besitzt.

KONVENTION In diesem Abschnitt sei X immer zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend.

Insbesondere ist X dann wegzusammenhängend.

Definition 5.4.2 Überlagerung

- a) Eine stetige Abbildung $f : Y \rightarrow X$ heißt ein *lokaler Homöomorphismus*, wenn jedes $y \in Y$ eine offene Umgebung V besitzt, sodass $f(V) \subseteq X$ offen ist und $f|_V : V \rightarrow f(V)$ ein Homöomorphismus ist.

Ein lokaler Homöomorphismus ist immer offen (klar, oder?).

- b) Es sei X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Weiter sei \tilde{X} nichtleer und wegzusammenhängend, und $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine stetige Abbildung.

Dann heißt (\tilde{X}, p) eine *Überlagerung* von X , wenn jedes $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, sodass jede Wegzusammenhangskomponente K von $p^{-1}(U)$ durch $p|_K$ homöomorph auf U abgebildet wird.

Jede solche Umgebung nennen wir eine *Elementarumgebung* für p .

- c) Eine Überlagerung ist immer ein lokaler Homöomorphismus, denn für \tilde{x} nehmen wir eine Elementarumgebung U von $x := p(\tilde{x})$ und die Wegzusammen-

hangskomponente von $p^{-1}(U)$, die \tilde{x} enthält. Sie ist offen und wird via p mit U identifiziert.

Daher ist das Bild von p offen in X .

Wenn $x \in X \setminus p(\tilde{X})$ ein Punkt außerhalb des Bildes von p ist, dann hat auch x eine Elementarumgebung U , die via p zu jeder Zusammenhangskomponente ihres Urbildes homöomorph ist. Da p aber den Punkt $x \in U$ nicht trifft, kann es keine solche Zusammenhangskomponente geben (NB: eine Zusammenhangskomponente ist immer nichtleer, denn sie ist eine Äquivalenzklasse. . .). Daher enthält das Urbild kein Element, also gehört ganz U zu $X \setminus p(\tilde{X})$.

Daher ist das Komplement des Bildes auch offen.

Da X zusammenhängend ist und \tilde{X} nichtleer, ist p surjektiv.

d) Etwas allgemeiner ist die Anzahl der Urbilder von $x \in X$ unter p lokal konstant. Wenn x und y nämlich in einer Elementarumgebung U liegen, ist die Anzahl ihrer Urbilder gerade die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten von $p^{-1}(U)$.

Da X zusammenhängend ist, ist die Anzahl der Urbilder auf ganz X konstant.

Man nennt die Kardinalität $\#p^{-1}(\{x\})$ der Faser eines beliebigen $x \in X$ die *Blätterzahl* oder auch der *Grad* von p .

Beispiel 5.4.3 alte Bekannte

- a) Die Abbildung $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, x \mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ ist eine Überlagerung.
- b) Die Abbildung $p : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}), x \mapsto [x]$, ist eine Überlagerung.
- c) Die kanonische Projektion $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ ist eine Überlagerung. In gewisser Weise verallgemeinert das Beispiel a).

Definition 5.4.4 Steckenpferd

Es sei X wie gehabt und Γ eine Gruppe. Weiter sei

$$\bullet : \Gamma \times X \rightarrow X$$

eine Gruppenoperation, sodass für jedes $\gamma \in \Gamma$ die Abbildung

$$\gamma \bullet : X \ni x \mapsto \gamma \bullet x \in X$$

ein Homöomorphismus ist.

Außerdem operiere die Gruppe fixpunktfrei auf X , das heißt, dass jedes $x \in X$ trivialen Stabilisator hat.

Dann heißt die Operation *eigentlich diskontinuierlich*, wenn für jedes $x \in X$ eine Umgebung U existiert, sodass die Mengen $\gamma \bullet U, \gamma \in \Gamma$, paarweise disjunkt sind.

In allen Beispielen oben liegt eine eigentlich diskontinuierliche Gruppenaktion zugrunde: stets ist das Bild der Überlagerung der Quotient vom Definitionsraum nach solch einer Aktion. (Die Gruppe ist \mathbb{Z} , $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ oder \mathbb{Z}^n .)

NB: Es gibt leicht differierende Versionen des Begriffs „eigentlich diskontinuierlich“. Insbesondere wenn X auch noch ein lokal kompakter metrischer Raum ist und $\gamma \bullet$ für jedes $\gamma \in \Gamma$ eine Isometrie ist, spricht man von eigentlicher Diskontinuität, wenn für jedes kompakte $K \subseteq X$ nur endlich viele Elemente γ existieren, für die $(\gamma \bullet K) \cap K \neq \emptyset$. Für viele interessante Räume ist das unter Annahme der Fixpunktfreiheit zur obigen Definition äquivalent.

Hilfssatz 5.4.5 Allgemeines Beispiel

Es sei \tilde{X} ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender Raum und Γ eine Gruppe, die eigentlich diskontinuierlich auf \tilde{X} operiert.

Dann ist $X := \tilde{X}/\Gamma$ zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, und die kanonische Projektion $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ ist eine Überlagerung.

Beweis. Klar ist X als stetiges Bild von \tilde{X} zusammenhängend.

Da für $T \subseteq \tilde{X}$ stets die Gleichheit

$$\pi^{-1}(\pi(T)) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \bullet T$$

gilt und $\gamma \bullet$ stetig ist, sind die Bilder von offenen Teilmengen von \tilde{X} unter π offene Teilmengen von X . Insbesondere ist π offen.

Ist U eine Umgebung von $\tilde{x} \in \tilde{X}$, die mit allen ihren Translaten unter Γ trivialen Schnitt hat, so wird U injektiv auf $\pi(U)$ abgebildet. Die Abbildung $\pi|_U$ ist eine offene stetige Bijektion mit $\pi(U)$, also ist π ein lokaler Homöomorphismus.

Insbesondere ist X lokal wegzusammenhängend.

Nun sei $x \in X$. Wir wählen ein Urbild \tilde{x} von x unter π und eine wegzusammenhängende Umgebung U von \tilde{x} , die mit ihren Translaten unter Γ trivialen Schnitt hat.

$\pi(U)$ ist eine wegzusammenhängende Umgebung von x , und nun müssen wir einsehen, dass U die Wegzusammenhangskomponente von \tilde{x} in $S := \pi^{-1}(\pi(U))$ ist.

Dazu müssen wir einsehen, dass keine U echt umfassende Teilmenge von S wegzusammenhängend ist.

Sei also $z \in S$ und $\omega : \mathbb{I} \rightarrow S$ ein Weg von \tilde{x} nach z . Es gibt dann genau ein $\gamma_0 \in \Gamma$, sodass z in $\gamma_0 \bullet U$ liegt. Die Überdeckung von \mathbb{I} durch die Urbilder

$$\omega^{-1}(\gamma \bullet U)$$

ist eine disjunkte Überdeckung durch offene Teilmengen, also – da \mathbb{I} zusammenhängend ist – sind die Mengen $\omega^{-1}(\gamma \bullet U)$ bis auf eine leer. Es folgt $\gamma_0 = 1$, und z liegt in U . \circ

Hilfssatz 5.4.6 ... höchstens ein Lift...

Es seien $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, Y zusammenhängend und $f_0, f_1 : Y \rightarrow \tilde{X}$ stetige Abbildungen mit

$$p \circ f_0 = p \circ f_1.$$

Dann gilt $f_0 = f_1$, oder $\forall y \in Y : f_0(y) \neq f_1(y)$.

Beweis. Es sei

$$Z := \{y \in Y \mid f_0(y) = f_1(y)\}.$$

Für $y \in Y$ sei $x = pf_0(y) = pf_1(y)$. Weiter seien U eine Elementarumgebung von x , K die Wegzusammenhangskomponente von $f_0(y)$ in $p^{-1}(U)$, K_1 die von $f_1(y)$ in dieser Menge, $q_0 : U \rightarrow K_0$ die Inverse zu $p|_{K_0}$, und q_1 analog.

Schließlich sei $V := f_0^{-1}(K_0) \cap f_1^{-1}(K_1)$. Dann gilt für $v \in V$:

$$f_0(v) = q_0(p(f_0(v))) \quad \text{und} \quad f_1(v) = q_1(p(f_1(v))),$$

jeweils weil $f_i(v)$ in K_i landet und q_i auf $p(K_i)$ das Richtige tut.

Nach Definition liegt y in W , und W ist offen.

Wenn nun $y \in Z$ gilt, dann stimmen K_0 und K_1 überein, und es folgt, dass ganz W in Z liegt. Damit ist Z offen.

Wenn y nicht in Z liegt, stimmen f_0 und f_1 auf ganz W nirgends überein, denn sie nehmen Werte in verschiedenen Zusammenhangskomponenten an. Daher ist auch $Y \setminus Z$ offen.

Insgesamt ist Z sowohl offen als auch abgeschlossen, und das impliziert die Behauptung, denn Y ist zusammenhängend. \circ

Hilfssatz 5.4.7 ... genau ein Lift...

Es sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und $\omega : \mathbb{I} \rightarrow X$ eine Kurve. Weiter sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ein Punkt mit $\omega(0) = p(\tilde{x})$.

Dann gibt es genau eine Kurve $\tilde{\omega} : \mathbb{I} \rightarrow \tilde{X}$, sodass

$$\tilde{\omega}(0) = \tilde{x} \quad \text{und} \quad \omega = p \circ \tilde{\omega}.$$

Beweis. Die Eindeutigkeit haben wir durch den vorherigen Hilfssatz abgesichert.

Zur Konstruktion von $\tilde{\omega}$ wählen wir für jedes $x \in \omega(\mathbb{I})$ eine Fundamentalumgebung. Deren Urbilder unter ω sind eine offene Überdeckung von \mathbb{I} , und zu dieser

gehört eine Lebesguezahl $\varepsilon > 0$. Wähle ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Dann liegen die Intervalle

$$\left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right], \quad 1 \leq j \leq m,$$

alle im Urbild einer Elementarumgebung in X . Nun definieren wir sukzessive die Kurve $\tilde{\omega}$ durch folgendes Vorgehen:

$\omega(0)$ hat eine Elementarumgebung U_1 , in der $\omega([0, 1/m])$ enthalten ist. Wir benutzen den zu p inversen Homöomorphismus q_1 von U_1 zur Zusammenhangskomponente von \tilde{x} in $p^{-1}(U_1)$ und setzen für $t \in [0, 1/m]$

$$\tilde{\omega}(t) := q_1(\omega(t)).$$

Wenn wir sukzessive die Abbildung $\tilde{\omega}$ auf den Intervallen $[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]$ für $1 \leq j \leq k$ schon haben und $k < m$ gilt, dann nehmen wir eine Elementarumgebung U_{k+1} von $\omega(k/m)$, die das Bild $\omega([k/m, (k+1)/m])$ enthält, und nehmen für q_{k+1} den Homöomorphismus von U_{k+1} zur Zusammenhangskomponente von $\tilde{\omega}(k/m)$ und $p^{-1}(U_{k+1})$, der dort zu p invers ist. Dann setzen wir

$$\tilde{\omega}(t) := q_{k+1}(\omega(t)), \quad \frac{k}{m} \leq t \leq \frac{k+1}{m}.$$

Nach Konstruktion passen die verschiedenen Teile von $\tilde{\omega}$ an den Nahtstellen zusammen und definieren daher insgesamt eine stetige Abbildung, die tut was wir wollen. \circ

Bemerkung 5.4.8 nochmal die Blätterzahl

a) Der Weg $\tilde{\omega}$ aus dem letzten Hilfssatz wird oft ein *Lift* von ω nach \tilde{X} genannt. Man stellt sich das immer so vor, dass die Überlagerung von oben auf den überlagerten Raum fällt, und dass man Dinge von unten *hochheben* muss, um sie oben in \tilde{X} wiederzufinden.

b) Nun haben wir noch einmal eine Möglichkeit, eine Bijektion zwischen den Urbildern $p^{-1}(x)$, $p^{-1}(y)$ für zwei Punkte $x, y \in X$ unter der Überlagerung p zu finden.

Dazu wählen wir einen Weg ω von x nach y im noch immer wegzusammenhängenden Raum X . Für jedes \tilde{x} lässt sich dieser Weg auf eindeutige Art zu einem Weg in \tilde{X} liften, und wenn wir \tilde{x} den Endpunkt dieses Weges zuordnen, dann ist das eine Abbildung von $p^{-1}(x)$ nach $p^{-1}(y)$.

In der umgekehrten Richtung erhalten wir auch eine Abbildung, die einem $\tilde{y} \in p^{-1}(y)$ den Endpunkt des Lifts von $\overleftarrow{\omega}$ mit Anfangspunkt \tilde{y} zuordnet.

Diese Abbildungen sind zueinander invers, denn wenn $\tilde{\omega}$ ein Lift von ω mit Anfangspunkt \tilde{x} und Endpunkt \tilde{y} ist, dann ist $\overleftarrow{\tilde{\omega}}$ ein Lift von $\overleftarrow{\omega}$ mit Anfangspunkt \tilde{y} und Endpunkt \tilde{x} .

Hilfssatz 5.4.9 siehe Kapitelüberschrift

Es seien $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und $\tilde{\omega}_i : \mathbb{I} \rightarrow \tilde{X}$, $i = 0, 1$ zwei Wege in \tilde{X} , die denselben Anfangspunkt haben, und deren Bilder $\omega_i := p \circ \tilde{\omega}_i$ in X relativ zu $\partial\mathbb{I}$ homotop sind.

Dann sind auch $\tilde{\omega}_0$ und $\tilde{\omega}_1$ relativ zu $\partial\mathbb{I}$ homotop. Insbesondere gilt auch

$$\tilde{\omega}_0(1) = \tilde{\omega}_1(1).$$

Beweis. Es sei

$$H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow X, \text{ mit } \begin{aligned} H(u, 0) &= \omega_0(u), & H(u, 1) &= \omega_1(u), \\ H(0, t) &= H(0, 0), & H(1, t) &= H(1, 0) \end{aligned}$$

eine Homotopie, die nach Voraussetzung mit den angegebenen Eigenschaften für alle $u, t \in \mathbb{I}$ existiert.

Zu dieser Abbildung des kompakten metrischen Raums $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ nach X und der Überdeckung von X durch Elementarumgebungen gehört wieder eine Lebesguezahl, und insbesondere gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, sodass für jedes Quadrat

$$Q_{i,j} := \left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m} \right] \times \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m} \right] \subseteq \mathbb{I} \times \mathbb{I}, \quad 1 \leq i, j \leq m,$$

gilt, dass

$$H(Q_{i,j}) \subseteq U_{i,j},$$

wobei $U_{i,j}$ eine Elementarumgebung in X ist.

Es sei $\tilde{U}_{i,1}$ die Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(U_{i,1})$, die $\tilde{\omega}_0(i/m)$ enthält, und $q_{i,1}$ der zu p inverse Homöomorphismus von $U_{i,1}$ nach $\tilde{U}_{i,1}$. Wir setzen

$$\forall (u, t) \in Q_{i,1} : \tilde{H}(u, t) := q_{i,1}(H(u, t)).$$

Wegen Hilfssatz 5.4.6 und

$$\omega_0(i/m) \in U_{i,1} \cap U_{i+1,m}$$

stimmen diese Definitionen auf $Q_{i,1} \cap Q_{i+1,1}$ überein, und wir erhalten einen stetigen Lift von $H|_{\mathbb{I} \times [0, 1/m]}$ nach \tilde{X} .

Auch wegen der Eindeutigkeit des Lifts ist diese Lift jeweils für $u = 0$ und $u = 1$ unabhängig von t .

Das definiert eine stetige Kurve $\tilde{\omega}_{1/m} : \mathbb{I} \rightarrow \tilde{X}$, die $H|_{\mathbb{I} \times \{1/m\}}$ nach \tilde{X} liftet und bei $\tilde{\omega}_0(0)$ anfängt und bei $\omega_0(1)$ aufhört.

Für $j = 1$ und mit dieser Kurve $\tilde{\omega}_{1/m}$ anstelle von $\tilde{\omega}_0$ wiederholen wir das Spielchen von gerade, und so fortfahrend definieren wir sukzessive den Lift \tilde{H} von H nach \tilde{X} . ○

Folgerung 5.4.10 einfach zusammenhängend

Es sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung. Dann gelten:

a) Für jedes $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ist die Abbildung

$$\pi_1(p) : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(X, p(\tilde{x}))$$

injektiv.

b) Ist \tilde{X} zusammenhängend und X einfach zusammenhängend, dann ist p ein Homöomorphismus.

Beweis.

a) Das folgt sofort aus 5.4.9, denn insbesondere sagt dieser Hilfssatz ja, dass zwei geschlossene Kurven mit Anfangs- und Endpunkt \tilde{x} in \tilde{X} sicher dann homotop sind, wenn dies für die Bildkurven in X gilt. Aber die entsprechende Zuordnung $[\tilde{\omega}] \mapsto [p \circ \tilde{\omega}]$ definiert gerade $\pi_1(p)$, und folglich ist das injektiv.

b) Es seien \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 zwei Urbilder von $x \in X$ unter p . Da \tilde{X} wegzusammenhängend (weil zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend) ist, gibt es einen stetigen Weg $\tilde{\omega}$ von \tilde{x}_1 nach \tilde{x}_2 . Sein Bild ist ein geschlossener Weg in X , und dieser ist homotop zum konstanten Weg, denn X ist als einfach zusammenhängend vorausgesetzt. Wieder wegen 5.4.9 folgt, dass $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$ gilt, das heißt: p ist injektiv. Da es auch surjektiv ist, ist es bijektiv, und damit als offene, stetige Bijektion ein Homöomorphismus. \circ

Definition 5.4.11 universelle Überlagerung

Es sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung.

a) p heißt eine *universelle Überlagerung* von X , wenn \tilde{X} einfach zusammenhängend ist.

b) Ist $r : Y \rightarrow X$ eine weitere Überlagerung von X , so heißt eine stetige Abbildung $s : \tilde{X} \rightarrow Y$ ein *Morphismus zwischen p und r* , wenn $r \circ s = p$ gilt.

In diesem Fall ist s eine Überlagerung von \tilde{X} auf $Z = s(\tilde{X}) \subseteq Y$, denn für $z \in Z$ gibt es eine gemeinsame Elementarumgebung U für p und r , die $r(z)$ enthält. Es sei K die Zusammenhangskomponente von $r^{-1}(U)$, die z enthält. Die Zusammenhangskomponenten von $s^{-1}(K)$ sind dann auch Zusammenhangskomponenten von $p^{-1}(U)$, und also zu U und damit zu K homöomorph, wobei die Homöomorphismen jeweils durch die bereits gegebenen Abbildungen vermittelt werden.

Das definiert eine Kategorie, deren Objekte gerade die zusammenhängenden Überlagerungen von X sind.

Die Automorphismen einer gegebenen Überlagerung, also die Homöomorphismen $s : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ mit $p = p \circ s$, heißen die *Decktransformationen* von p . Sie bilden eine Gruppe $\text{Deck}(p)$, die kreativer Weise die *Decktransformationsgruppe* von p genannt wird.

c) Es ist sinnvoll, sich auf zusammenhängende Überlagerungsräume zu beschränken, denn die verschiedenen Zusammenhangskomponenten von \tilde{X} leben ohne sich zu sehen nebeneinander her und beeinflussen sich nicht gegenseitig. Man kann jede Zusammenhangskomponente für sich untersuchen.

Konvention: Im Weiteren seien auch immer die Räume, die X überlagern, zusammenhängend.

Hilfssatz 5.4.12 Decktransformationen sind fixpunktfrei

a) *Es sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, \tilde{X} zusammenhängend, und $\tau : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ eine Decktransformation von p .*

Dann gilt $\tau = \text{Id}_{\tilde{X}}$, oder τ hat keinen Fixpunkt auf \tilde{X} .

b) *Die Decktransformationsgruppe $\text{Deck}(p)$ operiert eigentlich diskontinuierlich auf \tilde{X} .*

Beweis.

a) Das folgt wieder aus 5.4.6, indem wir $Y = \tilde{X}$, $f_0 = \text{Id}_{\tilde{X}}$ und $f_1 = \tau$ nehmen.

b) Für $\tilde{x} \in \tilde{X}$ sei U eine Elementarumgebung von $p(\tilde{x})$ und V die Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(U)$, die \tilde{x} enthält. Dann ist V eine offene Umgebung von \tilde{x} , und eine Decktransformation τ , für die $\tau V \cap V \neq \emptyset$ gilt, muss einen Fixpunkt in V haben, denn für $v \in \tau V \cap V \neq \emptyset$ gibt es nur ein Urbild von $p(v)$ in V , also ist $\tau(v) = v$. Es folgt wegen a), dass τ die Identität ist. \circ

Bemerkung 5.4.13 Konjugationsklasse

Wir erinnern noch einmal an 5.4.10, und ordnen jeder Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ nach Wahl von $x \in X$ und $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ die Untergruppe $\pi_1(p)(\pi_1(\tilde{X}))$ zu, die zur Fundamentalgruppe von \tilde{X} isomorph ist.

In Wirklichkeit ist das Bild von $\pi_1(p)$ aber immer noch von der Wahl eines Basispunkts $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ab. Ändert man diesen in der Faser von $x := p(\tilde{x})$ ab, so erhält man eine konjugierte Untergruppe in $\pi_1(X, p(\tilde{x}))$. Das ist die *zu p gehörende Konjugationsklasse* von Untergruppen in $\pi_1(X, x)$.

Wir werden noch sehen, dass diese die Überlagerung im Wesentlichen eindeutig festlegt.

Hilfssatz 5.4.14 Noch mal ein Lift

Es sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und $f : Y \rightarrow X$ stetig. Alle Räume hierbei seien zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend.

Weiter sei $y \in Y$ gewählt, $x = f(y)$ und $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. Dann sind äquivalent:

i) Es gibt einen stetigen Lift $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ von f mit $\tilde{f}(y) = \tilde{x}$.

ii) Es gilt $\pi_1(f)(\pi_1(Y, y)) \subseteq \pi_1(p)(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$.

Beweis.

i) \Rightarrow ii) Wenn es einen Lift gibt, so gilt ja $f = p \circ \tilde{f}$, und daher wegen der Funktorialität von π_1 auch

$$\pi_1(f) = \pi_1(p) \circ \pi_1(\tilde{f}),$$

also für jede Klasse $[\alpha] \in \pi_1(Y, y)$:

$$\pi_1(f)([\alpha]) = \pi_1(p)([\alpha \circ \tilde{f}]) \in \pi_1(p)(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})).$$

Also folgt ii)

ii) \Rightarrow i) Das ist die interessantere Richtung. Wir konstruieren \tilde{f} auf folgende Art: Es sei $z \in Y$ ein Punkt. Da Y wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\alpha : \mathbb{I} \rightarrow Y$ mit $\alpha(0) = y$, $\alpha(1) = z$.

Diesen Weg schieben wir mit f nach X und erhalten den Weg $f \circ \alpha$, der bei x anfängt. Diesen Weg können wir wegen 5.4.7 auf genau eine Art nach \tilde{X} liften. Den Lift nennen wir $\widetilde{f \circ \alpha}$. Sein Endpunkt muss – wenn es \tilde{f} überhaupt geben kann – gerade $\tilde{f}(z)$ sein.

Wir müssen nun zeigen, dass der so definierte Punkt

$$\tilde{f}(z) := \text{Endpunkt von } \widetilde{f \circ \alpha}$$

nicht von α sondern nur von z abhängt, und zwar stetig.

Wohldefiniertheit: Es sei $\beta : \mathbb{I} \rightarrow Y$ ein anderer Weg von y nach z . Dann ist $\alpha \bullet \overleftarrow{\beta}$ ein geschlossener Weg in Y , und sein Bild $\gamma := f \circ (\alpha \bullet \overleftarrow{\beta})$ ist ein geschlossener Weg in X , der bei x anfängt und aufhört.

Der Lift $\tilde{\gamma}$ von γ nach \tilde{X} mit Anfangspunkt \tilde{x} ist geschlossen.

Denn: Wegen der Voraussetzung ii) ist die Klasse von γ homotop zum Bild eines geschlossenen Weges $\tilde{\omega} : (\mathbb{I}, \partial\mathbb{I}) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x})$, und daher ist wegen 5.4.9 auch der Lift von γ zu $\tilde{\omega}$ homotop und insbesondere geschlossen.

Das heißt aber, dass die zweite Hälfte von

$$\tilde{\gamma} = f \circ \widetilde{\alpha \bullet \beta} = \widetilde{f \circ \alpha} \bullet \widetilde{f \circ \beta}$$

bei \tilde{x} aufhört.

Also hört – wieder wegen der Eindeutigkeit – der Lift von $f \circ \beta$, der bei \tilde{x} anfängt, dort auf, wo $\widetilde{f \circ \beta}$ anfängt, nämlich beim Ende von $\widetilde{f \circ \alpha}$.

Deshalb hängt das oben definierte $\tilde{f}(z)$ nicht von α ab.

Stetigkeit von \tilde{f} : Wir zeigen die Stetigkeit von \tilde{f} im Punkt $z \in Y$.

Es sei W eine offene Umgebung von $\tilde{f}(z)$. Da p offen ist, ist $p(W)$ eine offene Umgebung von $p(\tilde{f}(z)) = f(z)$. In ihr ist eine Elementarumgebung U von $f(z)$ enthalten. Es sei V die Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(U)$, die $\tilde{f}(z)$ enthält, und $q : U \rightarrow V$ der zu p inverse Homöomorphismus. Man kan U so klein machen, dass V in W enthalten ist (Stichwort Umgebungsbasis).

Schließlich sei Z eine wegzusammenhängende Umgebung von z , die in $f^{-1}(U)$ enthalten ist – Y ist ja lokal wegzusammenhängend, und f ist stetig...

Nun fixieren wir einen Weg α in Y , der von y nach z läuft.

Für $u \in Z$ sei β ein Weg von z nach u in Z . Dann ist $\alpha \bullet \beta$ ein Weg von y nach u , und $\tilde{f}(u)$ ist der Endpunkt des Lifts von $f \circ (\alpha \bullet \beta)$ mit Anfangspunkt \tilde{x} .

Da das Bild von β ganz in U verläuft, ist dieser Lift gleich

$$\widetilde{f \circ \alpha} \bullet q \circ (f \circ \beta).$$

Insbesondere liegt der Endpunkt des Lifts in $q(U) \subseteq W$, und damit ist $\tilde{f}(Z) \subseteq W$.

Daher ist \tilde{f} stetig. ○

Folgerung 5.4.15 Die Universalität der universellen Überlagerung

Es sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine universelle Überlagerung von X und $f : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung von X durch einen zusammenhängenden, lokal wegzusammenhängenden Raum.

Dann gelten:

- a) Es gibt einen Morphismus $\varphi : (\tilde{X}, p) \rightarrow (Y, f)$ von Überlagerungen von X .
- b) Ist auch Y eine universelle Überlagerung, so ist φ ein Isomorphismus.
- c) Die Decktransformationsgruppe von p operiert auf den Fasern von p transitiv.

d) Für ein (jedes) $x \in X$ gibt es einen Isomorphismus

$$\mu : \text{Deck}(p) \rightarrow \pi_1(X, x).$$

Beweis. a) Wie benutzen den vorherigen Hilfssatz (mit vertauschten Rollen für \tilde{X} und $Y \dots$) und sehen, dass *ii*) gilt, da \tilde{X} einfach zusammenhängend ist, also triviale Fundamentalgruppe hat.

b) Dies folgt, weil ein Morphismus zwischen zusammenhängenden Überlagerungen eine Überlagerung ist, und weil wir dann 5.4.10 benutzen können.

c) Wenn $\tilde{x}, \hat{x} \in p^{-1}(x)$ sind, so gibt es für $\tilde{X} = Y$ und $f = p$ nach dem letzten Hilfssatz einen Lift von p nach \tilde{X} , der \tilde{x} auf \hat{x} abbildet. Dieser Lift ist aber eine Decktransformation von p , und das zeigt die Behauptung.

d) Es seien $x \in X$ beliebig und $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ auch beliebig. Für eine Decktransformation τ von p gibt es einen stetigen Weg α von \tilde{x} nach $\tau(\tilde{x})$ in \tilde{X} .

Das Bild dieses Weges in X ist ein geschlossener Weg $p\alpha$, und wir ordnen τ die Homotopieklasse von $p\alpha$ zu:

$$\mu(\tau) := [f \circ \alpha].$$

Dies ist wohldefiniert, denn wenn β ein weiterer Weg von \tilde{x} nach $\tau(\tilde{x})$ ist, ist $\alpha \bullet \overleftarrow{\beta}$ geschlossen, also nullhomotop (\tilde{X} ist einfach zusammenhängend), also sind die Klassen von $f \circ \alpha$ und von $f \circ \overleftarrow{\beta}$ zueinander invers. Das zeigt, dass die Klassen von $f \circ \alpha$ und $f \circ \beta$ übereinstimmen.

Die Abbildung μ ist surjektiv, denn wenn $\gamma : (\mathbb{I}, \partial\mathbb{I}) \rightarrow (X, x)$ ein geschlossener Weg ist, liftet er zu einem Weg $\tilde{\gamma}$, der bei \tilde{x} anfängt und bei einem Punkt \hat{x} in der Faser über x aufhört. Da $\text{Deck}(p)$ wegen c) transitiv auf dieser Faser operiert, gibt es ein τ mit $\tau(\tilde{x}) = \hat{x}$. Nach Konstruktion von μ folgt $\mu(\tau) = [\gamma]$.

Die Abbildung μ ist auch injektiv, denn wenn $\tau, \sigma \in \text{Deck}(p)$ auf dieselbe Homotopieklasse abgebildet werden, müssen nach 5.4.9 die Punkte $\sigma(\tilde{x})$ und $\tau(\tilde{x})$ übereinstimmen. Da die Decktransformationsgruppe nach 5.4.12 ohne Fixpunkte operiert, folgt $\sigma = \tau$.

Schließlich ist μ ein Gruppenhomomorphismus. Wenn nämlich $\sigma, \tau \in \text{Deck}(p)$ sind und α, β Wege von \tilde{x} nach $\sigma(\tilde{x})$ bzw. $\tau(\tilde{x})$ sind, dann ist $\sigma \circ \beta$ eine Weg von $\sigma(\tilde{x})$ nach $\sigma(\tau(\tilde{x}))$, und es gilt mit $\gamma := \alpha \bullet (\sigma \circ \beta)$ und wegen $p = p\sigma$:

$$\mu(\sigma \circ \tau) = [p(\alpha \bullet \sigma \circ \beta)] = [p\alpha] \bullet [p\sigma\beta] = [p\alpha] \bullet [p\beta] = \mu(\tau) \bullet \mu(\sigma).$$

○

Satz 5.4.16 Hauptsatz der Überlagerungstheorie

Es seien X ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender topologischer Raum und $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine universelle Überlagerung. Weiter sei $x \in X$ ein beliebiger Punkt.

Dann gibt es eine Bijektion zwischen der Menge aller Isomorphieklassen von zusammenhängenden Überlagerungen von X und der Menge aller Konjugationsklassen von Untergruppen von $\pi_1(X, x)$.

Beweis. Wir kennen bereits die Konjugationsklasse, die zu einer Überlagerung gehört.

Ist umgekehrt $\Gamma \subseteq \pi_1(X, x)$ eine Untergruppe, so benutzen wir die Identifikation von $\pi_1(X, x)$ mit $\text{Deck}(p)$ und lassen Γ auf \tilde{X} operieren.

Dann ist wegen 5.4.12 und 5.4.5 die kanonische Abbildung $r : \tilde{X} \rightarrow \Gamma \backslash \tilde{X}$ eine Überlagerung, deren Decktransformationsgruppe gerade Γ ist, und diese ist wegen 5.4.15 die Fundamentalgruppe von $\Gamma \backslash \tilde{X}$.

Da alle Bahnen von \tilde{X} unter Γ in den Bahnen unter $\pi_1(X, x)$ liegen, erhalten wir eine natürliche Abbildung $f : \Gamma \backslash \tilde{X} \rightarrow \pi_1(X, x) \backslash \tilde{X} \cong X$. Diese ist offensichtlich eine Überlagerung, und das Bild von $\pi_1(\Gamma \backslash \tilde{X}, \Gamma \tilde{x})$ in $\pi_1(X, x)$ ist offensichtlich Γ . \circ

Beispiel 5.4.17 Was es nicht alles gibt...

Ein n -dimensionaler Torus ist topologisch der Quotient

$$T = \mathbb{Z}^n \backslash \mathbb{R}^n.$$

Das ist eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit, denn \mathbb{Z}^n operiert fixpunktfrei und eigentlich diskontinuierlich auf \mathbb{R}^n .

Die kanonische Projektion von \mathbb{R}^n auf T ist die universelle Überlagerung, also ist \mathbb{Z}^n die Fundamentalgruppe von T .

Da diese Gruppe abelsch ist, sind alle Konjugationsklassen von Untergruppen einelementig, wir erhalten also eine Bijektion zwischen den Untergruppen von \mathbb{Z}^n und den Überlagerungen von T . Der zu $\Gamma \subseteq \mathbb{Z}^n$ gehörende Überlagerungsraum ist $\Gamma \backslash \mathbb{R}^n$, die Decktransformationsgruppe von diesem über T ist \mathbb{Z}^n / Γ .

Insbesondere sind alle Überlagerungen von $\mathbb{S}^1 = \mathbb{Z} \backslash \mathbb{R}$ entweder die universelle Überlagerung oder von der Form

$$\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, z \mapsto z^n$$

für ein geeignetes $n \in \mathbb{Z}$.

Die zu n und $-n$ gehörenden Überlagerungen sind hierbei isomorph.

Als Nebenprodukt erhalten wir noch, dass jede stetige Abbildung eines einfach zusammenhängenden wegzusammenhängenden Raums Y nach T sich liften lässt zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f} : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$. Da dieser Raum kontrahierbar ist, ist \tilde{f} nullhomotop, und das gilt dann auch für f .

Beispiel 5.4.18 Der spinnt

Eine physikalisch interessante Überlagerung ist die folgende.

Es sei $G = \text{SO}(3)$ die orthogonale Gruppe in Dimension 3. Sie wird von der unitären Gruppe $\tilde{G} = \text{SU}(2)$ überlagert, es ist nämlich

$$G \cong \tilde{G}/\{\pm 1\}.$$

Um das einzusehen, betrachten wir die Quaternionenalgebra

$$\mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Das ist ein Teilring des komplexen Matrizenrings.

Darin liegt unsere Gruppe

$$\text{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \mid |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\},$$

denn dieser Ausdruck ist gerade die Determinante. In \mathcal{H} findet sich aber auch der dreidimensionale reelle Vektorraum

$$V = \{A \in \mathcal{H} \mid \text{Spur}(A) = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}i \right\}.$$

Die Determinante einer solchen Matrix $A \in V$ ist ebenfalls $|a|^2 + |b|^2$, sie ist also das Quadrat der Normform des Standardskalarprodukts auf V mit der naheliegenden Basis.

Für $g \in \text{SU}(2)$ und $A \in V$ gilt dann:

$$gAg^{-1} \in V \text{ und } \det(gAg^{-1}) = \det A.$$

Also operiert $\text{SU}(2)$ über normerhaltende lineare Abbildungen auf V , und das liefert nach Basiswahl einen Homomorphismus

$$p : \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3).$$

Der Kern hiervon ist gerade ± 1 , und demnach ist die Abbildung nicht nur stetig, sondern – aus Dimensionsgründen – auch offen. Da $\text{SO}(3)$ zusammenhängend und

hausdorffsch ist und $SU(2)$ kompakt, ist p surjektiv und ein lokaler Homöomorphismus. Also eine Überlagerung.

Diese Überlagerung ist letztlich für ein Phänomen der Quantenmechanik relevant: für die Existenz von Teilchen mit halbzahligen Spin. Der Mechanismus ist der, dass ausgehend von rotationssymmetrischen Annahmen die Differentialgleichungen für freie Teilchen formuliert werden. Diese Differentialgleichungen sehen aber nicht mehr die Gruppe $SO(3)$, die die Rotationssymmetrie liefert, sondern nur noch deren Tangentialraum im Einselement (in Form von Differentialoperatoren). Dieser Raum wird vermöge p mit dem Tangentialraum an $SU(2)$ im Einselement identifiziert. Wenn man nun „infinitesimal bekannte“ Wege zur Gruppe hochliften möchte, wird man oft nicht in $SO(3)$ landen können, sondern nur in deren universellen Überlagerung $SU(2)$. Auch wenn man das Gefühl hat, sich um 360° zu drehen, kann das oben in $SU(2)$ eventuell nur die halbe Miete sein: es gibt in $SO(3)$ geschlossene Wege, die nicht nulhomotop sind, aber der zweimal durchlaufene Weg schon.

Beispiel 5.4.19 Logarithmus

Ein anderes nettes Beispiel für das Schöne an Überlagerungen ist der komplexe Logarithmus.

Stellen Sie sich vor, Sie hätten in der komplexen Ebene die Differentialgleichung

$$f'(z) = 1/z$$

gegeben.

Sie hat eine Singularität in $z = 0$. Aber um jeden Punkt $z_0 \neq 0$ gibt es eine Umgebung, in der die Gleichung mit beliebigem Startwert $f(z_0) = w_0$ eindeutig gelöst werden kann. Wenn man nun bei $z_0 = 1$ startet und versucht, die Lösung mit $f(1) = 0$ fortzusetzen, so kann man das ein Stück weit machen, aber wenn man zu $z = 1$ zurückkehrt, wird man in aller Regel nicht wieder den Wert 0 herausbekommen, sondern ein Element von $\mathbb{Z} \cdot 2\pi i$.

Das liegt topologisch gesehen daran, dass hier in Wirklichkeit ein Problem auf der universellen Überlagerung von $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ behandelt wird, das sich dort sehr einfach lösen lässt.

Die universelle Überlagerung von X ist \mathbb{C} , die Überlagerungsabbildung ist die komplexe Exponentialfunktion:

$$p(w) := \exp(2\pi iw) = \sum_{k=0}^{\infty} (2\pi iw)^k / k!$$

Wenn f eine Lösung unserer alten Differentialgleichung in einer - sagen wir - Elementarumgebung für p ist, dann gilt auf einer Komponente von $p^{-1}(U)$ für

die Funktion $g = f \circ p = f(\exp(2\pi iw))$

$$g'(w) = f'(\exp(2\pi iw)) \cdot 2\pi i \exp(2\pi iw) = 2\pi i.$$

Das heißt:

$$g(w) = 2\pi iw + c$$

für eine konstante c . Das ist wunderbarer Weise auf ganz \mathbb{C} konsistent lösbar.

Wenn man nun auf der Faser eines Punktes $z \in X$ unter p entlang hüpf, ändert sich der Wert von diesem g immer um Vielfache von $2\pi i$, und das ist gerade das in X beobachtete Phänomen.

Beispiel 5.4.20 Zwei Singularitäten

Wenn wir auf \mathbb{C} die Differentialgleichung

$$f'(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

betrachten, dann ist diese immer noch lokal wunderbar lösbar für beliebige Startwerte, allerdings haben wir jetzt zwei Singularitäten.

Es ist nun nicht mehr so einfach, die universelle Überlagerung hinzuschreiben. Die Lösung ist nun im Wesentlichen von der Gestalt $-\ln(z) + \ln(z-1)$, und man hat in jedem der beiden Summanden die Freiheit, einen Zweig der Logarithmusfunktion auszuwählen. In jedem Fall ist die Funktion wieder „mehrdeutig“, und es wird prinzipiell besser, wenn wir zur universellen Überlagerung übergehen. Die Fundamentalgruppe von $X = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ ist frei in zwei Erzeugern, also muss auch die Decktransformationsgruppe der universellen Überlagerung diese Eigenschaft haben.

Wir zaubern sie aus dem Hut durch Betrachtung von

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}.$$

Hierauf operiert $SL(2, \mathbb{R})$ durch Möbiustransformationen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * z := \frac{az + b}{cz + d},$$

und diese Aktion ist isometrisch bezüglich der hyperbolischen Metrik $d_{\mathbb{H}}$.

In Wirklichkeit wirken hier die Matrizen A und $-A$ genau gleich, und man betrachtet besser die Gruppe

$$PSL(2, \mathbb{R}) := \{\{A, -A\} \mid A \in SL(2, \mathbb{R})\}.$$

Jede fixpunktfreie Untergruppe Γ von $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, die diskrete Bahnen auf \mathbb{H} hat, operiert daher eigentlich diskontinuierlich. Denn: Für $z \in \mathbb{H}$ ist $\Gamma * z$ diskret, also gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$\Gamma * z \cap B_{2\varepsilon}(z) = \{z\}.$$

Daher sind die Kugeln $B_\varepsilon(z)$ und $\gamma * B_\varepsilon(z)$ disjunkt, wenn γ nicht das Einselement ist.

Also ist Γ die Fundamentalgruppe von $\Gamma \backslash \mathbb{H}$, denn \mathbb{H} ist einfach zusammenhängend und wir haben 5.4.15.

Speziell für die Gruppe

$$\Gamma := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, a, d \text{ ungerade, } c, d \text{ gerade, } ad - bc = 1 \right\} / \pm 1$$

kann man verifizieren, dass $\Gamma(2) \backslash \mathbb{H}$ eine Kugel ohne drei Punkte ist, also \mathbb{C} ohne 2 Punkte.

Allerdings ist es jetzt etwas schwerer, die Überlagerungsabbildung $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ hinzuschreiben.

Dieses und ähnliche Phänomene werden mithilfe der Theorie der Modulformen behandelt.

Bemerkung 5.4.21 Zu guter Letzt

a) Wir haben noch kein allgemeines Kriterium, wann es zu einem zusammenhängenden und lokal wegzusammenhängenden Raum X eine universelle Überlagerung gibt. Es lässt sich relativ leicht einsehen, dass hier jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U haben muss, sodass das Bild von $\pi_1(U, x)$ in $\pi_1(X, x)$ unter der Einbettung von U nach X trivial ist. Solche Räume heißen *semilokal einfach zusammenhängend*.

Wenn X umgekehrt diese Eigenschaft hat, dann gibt es auch eine universelle Überlagerung. Diese konstruiert man, indem man für festes $x_0 \in X$ den Raum \tilde{X} der Homotopieklassen aller Wege $\alpha : \mathbb{I} \rightarrow X$ mit $\alpha(0) = x_0$ betrachtet, wobei Homotopien wieder relativ zum Rand von \mathbb{I} zu nehmen sind. Das heißt insbesondere, dass alle Homotopieklassen einen festen Endpunkt haben, und wir erhalten eine wohldefinierte Abbildung

$$p : \tilde{X} \rightarrow X, [\alpha] \mapsto \alpha(1).$$

Nun wird \tilde{X} noch so topologisiert, dass dies eine Überlagerung ist. Dazu wählt man sich für jedes $x \in X$ eine wegzusammenhängende Umgebung U_x , deren Fundamentalgruppe in X verschwindet.

Als Umgebung eines Punktes $[\alpha] \in \tilde{X}$ mit $p([\alpha]) = x$ nimmt man dann die Homotopieklassen von Wegen

$$\alpha \bullet \beta, \quad \beta : \mathbb{I} \rightarrow U_x, \beta(1) = \alpha(0) = x.$$

Man muss nachrechnen, dass die so ermittelte Topologie das tut, was man will.

b) Jede Mannigfaltigkeit ist semilokal einfach zusammenhängend, da jeder Punkt ja sogar eine Umgebungsbasis aus Mengen hat, deren Fundamentalgruppen trivial sind.

Für kompakte, orientierbare und differenzierbare Flächen gibt es drei Möglichkeiten für die universelle Überlagerung: Ist das Geschlecht 0, so ist $X \cong \mathbb{S}^2$ bereits einfach zusammenhängend, ist das Geschlecht 1, so ist $X \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ und hat \mathbb{R}^2 als universelle Überlagerung, und ist das Geschlecht mindestens 2, so ist \mathbb{H} die universelle Überlagerung wobei als Decktransformationsgruppe eine Untergruppen von $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ dient.

Dieser *Riemannsche Uniformisierungssatz* ist schon ziemlich schwer zu beweisen.

Es kommt aber noch toller:

c) Die berühmte *geometrization conjecture* von Thurston⁴ besteht darin, dass jede kompakte orientierbare differenzierbare dreidimensionale Mannigfaltigkeit diffeomorph ist zu einer geschickten Vereinigung von Teilmannigfaltigkeiten, die durch eine gut verstandene universelle Überlagerung gut zu handhaben sind.

Dies ist wohl mittlerweile von Perelman⁵ bewiesen, der dafür 2006 die Fieldsmedaille hätte bekommen können, hätte er nur gewollt. Als Spezialfall ist damit auch die Poincaré⁶-Vermutung bewiesen.

⁴William Thurston, geb. 1946

⁵Grigori Yakovlevich Perelman, geb. 1966

⁶Jules-Henri Poincaré, 1854-1912

Kapitel 6

Index

Ich fange an mit einer kleinen Auflistung von Symbolen.

$\overset{\circ}{A}$	das Innere von A
\bar{A}	der Abschluss von A
∂A	der Rand von A
$\mathcal{B}(X, Y)$	beschränkte Abbildungen von X in den metr. Raum Y
$B_r(x)$	offene Kugel vom Radius r um x
$\mathcal{C}(X, Y)$	stetige Abbildungen von X nach Y
d	Metrik eines metrischen Raums
\mathbb{D}^2	abgeschlossene Einheitskreisscheibe in der Ebene
$\text{Deck}(p)$	Decktransformationsgruppe der Überlagerung p
$ f _\infty$	Supremumsnorm der beschränkten Funktion f
\mathbb{I}	das Einheitsintervall $[0, 1]$
M/\cong	Quotientenmenge von M nach der Äquivalenzrelation \cong
$\text{mSpec}(\mathcal{A})$	Maximalspektrum der Algebra \mathcal{A}
$\mathcal{P}(M)$	Potenzmenge der Menge M
$\mathbb{P}^n(K)$	projektiver Raum der Dimension n über dem Körper K
$\pi_n(X, *)$	n -te Homotopiegruppe eines punktierten Raums
\mathbb{S}^n	n -dimensionale Einheitskugel
$S(X)$	Suspension von X
$\overleftarrow{\sigma}$	zu σ inverser Weg
$\chi(\gamma, x)$	Umlaufzahl von γ um x
$[X, Y]$	Menge der Homotopieklassen in $\mathcal{C}(X, Y)$
$(X, *)$	punktierter Raum
•	Aneinanderhängung zweier Wege (-klassen...)

Und dann wäre da noch das Stichwortverzeichnis...

- abgeschlossene Menge 3.1.1
- Abschluss 3.1.3
- Abstand (zweier Mengen) 2.1.6
- abstandserhaltende Abbildung 2.1.4
- Ankleben eines Henkels 4.3.5
- Atlas 4.1.1
- Bahn, Bahnenraum 1.3.1
- Basis einer Topologie 3.1.6
- Blätterzahl 5.4.2
- Brouwers Fixpunktsatz (in Dimension 2) 5.1.4
- Cauchyfolge 2.2.1
- Decktransformationsgruppe 5.4.11
- Deformationsretrakt 5.3.11
- dicht 2.2.3, 3.1.5
- differenzierbare Mannigfaltigkeit 2.4.10
- diskrete Metrik 3.1.5
- diskrete Topologie 3.1.2
- Dreiecksungleichung 2.1.1
- eigentlich diskontinuierlich 5.4.4
- einfach zusammenhängend 5.3.10
- Elementarumgebung 5.4.2
- erstes Abzählbarkeitsaxiom 4.1.5
- Eulercharakteristik von Graphen 5.3.21
- Eulers Polyedersatz 4.2.10, 4.2.11
- Faserprodukt 1.3.3
- feinere Topologie 3.1.8
- Filter 2.5.3
- Fläche 4.3.1
- folgenkompakt 4.1.6
- Fourierreihen 3.3.9
- Fundamentalgruppe 5.3.6
- Fundamentalsatz der Algebra 3.3.14
- Geschlecht 5.3.23
- Grad (einer Überlagerung) 5.4.2
- Graph 2.1.3
- Hauptsatz der Überlagerungstheorie 5.4.16
- hausdorffsch 3.2.9
- homotop, Homotopie 5.2.1
- homotop relativ zu ... 3.1.8
- homotopieäquivalent 5.2.4
- Homotopiegruppe 3.2.23
- Homöomorphismus 3.3.1
- Inneres einer Menge 3.1.3
- Isometrie 2.1.4
 - gruppe 2.1.4
- Jordankurve 3.3.15
- Jordanscher Kurvensatz 4.2.8
- kanonische Projektion S. 9
- Kantenzug 2.1.3
- Kartenwechsel 4.1.2, 4.1.9
- koendliche Topologie 2.2.5
- kompakt 3.2.1
- kompakt offene Topologie 5.2.1
- Konjugationsklasse einer Überlagerung 5.4.13
- kontrahierbar 5.2.4
- Konvergenz 2.2.1, 4.1.6
- konvex 5.2.5
- Lift 5.4.8
- lokaler Homöomorphismus 5.4.2
- lokal kompakt 5.2.1

- lokal zusammenhängend 5.4.1
- lokal wegzusammenhängend 5.4.1
- Maximumsnorm 2.1.2
- metrischer Raum, Metrik 2.1.1
- Morphismus zwischen Überlagerungen 3.3.11
- normaler Raum 4.2.2
- nullhomotop 5.2.7
- offene Kugel 2.3.1
- offene Menge 2.3.6, 3.1.1
- Offenheit (einer Abbildung) 3.3.12
- Operation einer Gruppe 1.3.1
- orientierbare Fläche 4.3.10
- p -adische Metrik 2.1.2
- Partition 1.3 am Anfang
- Peanokurve 3.3.11
- Produkttopologie 3.1.9
- projektiver Raum 1.3.2
- punktierter Raum 5.3.1
- Quotiententopologie 3.1.10
- Rand 3.1.3
- regulärer Raum 4.2.2
- Retrakt 5.3.11
- Satz von Dini 3.3.7
- Satz von Heine-Borel 3.2.4
- Satz von der impliziten Funktion 4.1.8
- Satz von Liouville 3.3.13
- Satz von Seifert - van Kampen 5.3.16
- Satz von Stone-Weierstraß 3.3.8
- Satz von Urysohn 4.2.4
- Satz von Tietze 4.2.5
- Spurtopologie 3.1.9
- stereographische Projektion 2.3.3
- sternförmig 5.2.5
- Stetigkeit 2.3.2, 3.3.1
- Stone-Cech-Kompaktifizierung 2.5.10
- Subbasis 2.1.5
- Suspension 3.2.21
- Teilraum 3.1.9
- Topologie metrischer Räume 2.3.6
- topologische Mannigfaltigkeit 4.1.3
- topologischer Raum 3.1.1
- topologisches Paar 3.1.8
- Überlagerung 5.4.2
- Umgebung, Umgebungsbasis 3.1.6
- Umlaufzahl 5.1.3
- universelle Überlagerung 5.4.11
- vollständig 2.2.1
- Weg 2.3.9
- wegzusammenhängend 3.3.10
- Zusammenhangskomponente 3.2.8
- zusammenhängend 3.2.6
- Graph: 2.1.3
- zusammenhängende Summe 4.3.5
- zweites Abzählbarkeitsaxiom 4.1.5
- Zwischenwertsatz 3.3.6