Einige Grundbegriffe der Topologie

Eine empfehlenswerte Einführung in die Topologie ist das Buch von K.Jänich [J].

Ein ***topologischer Raum*** ist ein Paar $(X, \mathcal{T})$ bestehend aus einer Menge X und einem System $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X, so dass gilt:

(1) X und $\emptyset$ sind in $\mathcal{T}$,

(2) der Durchschnitt von endlich vielen und die Vereinigung von beliebig vielen Mengen aus $\mathcal{T}$ ist wieder in $\mathcal{T}$.

Ein solches Teilmengensystem $\mathcal{T}$ nennt man eine ***Topologie von*** X. Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen ***offene Teilmengen von*** X. Eine Menge $A \subset X$ ist ***abgeschlossen in*** X genau dann, wenn ihr Komplement offen ist.

Eine ***Basis*** von $\mathcal{T}$ ist eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, so dass für jede offene Menge $V \in \mathcal{T}$ gilt $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ mit $V_i \in \mathcal{B}$.

Übung: $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ haben eine abzählbare Basis.

Sei $x \in X$. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt ***Umgebung von*** $x \in X$, wenn es eine offene Menge V gibt mit $x \in V \subset U$. Ein topologischer Raum erfüllt das ***Hausdorffsche Trennungsaxiom*** oder ist ***hausdorffsch***, wenn zu je zwei verschiedenen Punkten disjunkte, offene Umgebungen existieren.

Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ eines topologischen Raumes ist selbst wieder ein topologischer Raum versehen mit der ***Teilraum-Topologie***: Eine Menge $U \subseteq Y$ ist offen genau dann, wenn es eine offene Menge V von X gibt mit $V \cap Y = U$.

Übung: Sei X hausdorffsch mit abzählbarer Basis. Dann ist jeder Teilraum $Y \subset X$ ebenfalls hausdorffsch mit abzählbarer Basis.

Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen, $f : X \longrightarrow Y$, heißt ***stetig***, falls die Urbilder von offenen Mengen in Y offen sind in X. Die Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt ***offen***, falls Bilder von offenen Mengen in X offen sind in Y. Eine bijektive Abbildung $f : X \longrightarrow Y$, für die sowohl f als auch ihre Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ stetig sind, heißt ***Homöomorphismus***.

Ein ***metrischer Raum*** ist ein Paar (X, d), bestehend aus einer Menge X und einer Abbildung $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $x, y, z \in X$ gilt:

(1) $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

(2) $d(x,y) = d(y,x)$,

(3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Ein metrischer Raum (X, d) ist auch ein topologischer Raum. Die Topologie wird wie folgt definiert: eine Menge $O \subset X$ ist offen, falls für alle $p \in O$ ein $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$ existiert, so dass der (offene) Ball um p mit Radius ε ganz in O enthalten ist: $B_\varepsilon(p) := \{q \in X \mid d(p,q) < \varepsilon\} \subset O$.

Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ eines topologischen Raumes heißt ***kompakt***, wenn jede Überdeckung von Y durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Ein topologischer Raum X heißt ***zusammenhängend***, wenn er sich nicht in zwei nichtleere, disjunkte, offene Teilmengen zerlegen lässt (oder, äquivalent, wenn X und $\emptyset$ die einzigen zugleich offenen und abgeschlossenen Teilmengen sind).

Übung: Stetige Bilder von kompakten Mengen sind kompakt. Stetige Bilder von zusammenhängenden Mengen sind zusammenhängend.

Seien X und Y topologische Räume. Eine Teilmenge $W \subseteq X \times Y$ heißt ***offen in der Produkt-Topologie***, wenn es zu jedem Punkt $(x, y) \in W$ Umgebungen U von x in X und V von y in Y gibt, so dass $U \times V \subseteq W$.

Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Wir bezeichnen mit $[x] := \{y \in X | \ y \sim x\}$ die Äquivalenzklasse von x. Weiter bezeichne $X/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen und $\pi : X \longrightarrow X/\sim; \ x \mapsto [x]$ die natürliche Projektion. Die ***Quotienten-Topologie auf*** $X/\sim$ ist so definiert: $U \subset X/\sim$ ist offen genau dann, wenn $\pi^{-1}(U)$ offen ist in X (π ist dann stetig).

Übung: Sei $X = \mathbb{R}$ und $x \sim y$ genau dann, wenn $x - y \in \mathbb{Z}$. Es gilt: $\mathbb{R}/\sim$ ist homöomorph zu $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Lemma 1. *Falls $\pi : X \longrightarrow X/\sim$ offen ist und X eine abzählbare Basis hat, so hat auch der Quotientenraum $X/\sim$ eine abzählbare Basis.*

Beweis. Sei $\{U_i\}$ eine abzählbare Basis von offen Mengen von X. Ist W eine offene Teilmenge von $X/\sim$, dann ist $\pi^{-1}(W)$ offen in X (nach Definition der Quotienten-Topologie). Also $\pi^{-1}(W) = \bigcup_{j \in J} U_j$ für eine Teilfamilie von $\{U_i\}$ und $W = \pi(\pi^{-1}(W)) = \bigcup_{j \in J} \pi(U_j)$. Somit ist $\{\pi(U_i)\}$ eine Basis aus offenen Mengen von $X/\sim$. $\square$

Lemma 2. *Sei $\pi : X \longrightarrow X/\sim$ offen. Ist $\mathcal{R} := \{(x, y) \in X \times X | x \sim y\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times X$, so ist der Quotientenraum $X/\sim$ hausdorffsch.*

Beweis. Sind $\pi(x)$ und $\pi(y)$ zwei verschiedene Punkte in $X/\sim$, so ist $(x, y) \notin \mathcal{R}$. Da das Komplement von $\mathcal{R}$ offen ist in $X \times X$ existiert eine offene Menge $\tilde{U} \times \tilde{V} \subset X \times X$, welche (x, y) enthält und $\mathcal{R}$ nicht trifft, d.h. $U := \pi(\tilde{U})$ und $V := \pi(\tilde{V})$ sind disjunkt. Da nach Voraussetzung π offen ist, sind U und V offen. Da $\pi(x) \in U$ und $\pi(y) \in V$ ist $X/\sim$ hausdorffsch. $\square$

Satz von der Gebietstreue: *Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive und stetige Abbildung, so ist $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ auch offen.*

Einen Beweis dieses Satzes von Brouwer findet man in [AH] Kap. X.2

Korollar 1 *Für $m \neq n$ ist $\mathbb{R}^m$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^n$.*

Beweis-Skizze. Ist etwa $m < n$ so ist $(x^1, \ldots, x^m) \longmapsto (x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0)$ eine injektive, stetige Abbildung von $\mathbb{R}^m$ auf eine nicht offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Wäre nun $\mathbb{R}^m$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$, so hätte man einen Widerspruch zum Satz von der Gebietstreue. $\square$

Literatur

[AH] P. Alexandroff, H. Hopf, *Topologie I*, Springer Verlag, 1935.

[J] K. Jänich, *Topologie*, 4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[F] L. Führer, *Topologie* , Vieweg Verlag, 1977.

[O] E. Ossa, *Topologie* , Vieweg-Studium, 1992.