Karlsruher Institut für Technologie

**Fakultät für Mathematik**
**Institut für Algebra und Geometrie**
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Rafaela Dietrich

# Geometrische Gruppentheorie II (WS 2013/14)
# Übungsblatt 1

### Aufgabe 1 (Hyperkugeln)

Die $n$-dimensionale Einheitskugel ist definiert als $K_n := \{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$. Berechnen Sie das Volumen $Vol(K_n)$ von $K_n$ und stellen Sie fest, dass $\lim_{n\to\infty} Vol(K_n) = 0$.

### Aufgabe 2 (Punktspiegelungen)

Die Punktspiegelung $\sigma_P$ an einem Punkt $P \in \mathbb{H}^2$ (bzw. $\mathbb{S}^2$) weist jedem Punkt $z \in \mathbb{H}^2$ (bzw. $\mathbb{S}^2$) einen Punkt $\sigma_P(z) \in \mathbb{H}^2$ (bzw. $\mathbb{S}^2$) zu, sodass $z, P$ und $\sigma_P(z)$ auf einer Geodätischen liegen und $P$ die Strecke von $z$ nach $\sigma_P(z)$ halbiert.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $P \in \mathbb{H}^2$ die Punktspiegelung $\sigma_P$ eine Isometrie ist.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $P \in \mathbb{S}^2$ die Punktspiegelung $\sigma_P$ eine Isometrie ist.

### Aufgabe 3 (Iwasawa-Zerlegung)

Gegeben seien folgende beiden Untergruppen von $SL(n,\mathbb{R})$:

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \middle| \lambda_i > 0 \text{ für alle } i \text{ und } \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n = 1 \right\} \qquad \text{und} \qquad N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie: Jedes Element $g \in SL(n,\mathbb{R})$ hat eine eindeutige Darstellung $g = kan$ als Produkt von Elementen $k \in SO(n)$, $a \in A$ und $n \in N$.
Diese Zerlegung heißt *Iwasawa-Zerlegung*.

(b) Berechnen Sie die Iwasawa-Zerlegung von $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

### Aufgabe 4

Zeigen Sie:

(a) Es sei $M$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sowie $(x_1,...,x_n)$ wie in der Vorlesung lokale Koordinaten um einen Punkt $p \in M$. Dann ist

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p \right\}$$

eine Basis von $T_pM$.

(b) Es sei $F : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Ist $c : I \to M$ eine Kurve in $M$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v \in T_pM$, so gilt

$$dF_p(v) = \frac{d}{dt}(F \circ c)\Big|_{t=0}.$$