Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Rafaela Dietrich

Geometrische Gruppentheorie II (WS 2013/14)
Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (Lie Algebra)

Zeigen Sie für $X, Y \in \mathcal{V}M$ und $[X, Y] := XY - YX$ folgende Aussagen:

(a) $[Y, X] = -[X, Y]$ (Schiefsymmetrisch)
(b) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ ($\mathbb{R}$-bilinear)
(c) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (Jacobi-Identität)

Aufgabe 2 (Christoffel-Symbole)

Es sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita Zusammenhang D. In lokalen Koordinaten gilt

$$D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Berechnen Sie die Γ_{ij}^k aus den $g_{ij} := \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$.

Aufgabe 3 (Starrheit von Isometrien)

Es sei M eine zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie: Sind Φ und Ψ Isometrien von M mit $\Phi(p) = \Psi(p)$ und $d\Phi_p = d\Psi_p$ für *ein* $p \in M$, so ist $\Phi = \Psi$.