Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Rafaela Dietrich

Geometrische Gruppentheorie II (WS 2013/14)
Übungsblatt 3

Aufgabe 1

Für $0 \leq k \leq n$ bildet die Menge aller k-dimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$ die Grassmann-Mannigfaltigkeit $G(k, n)$. Definieren Sie Karten für $G(k, n)$ und bestimmen Sie die Dimension.

Aufgabe 2

Es sei G eine Lie-Gruppe und $X, Y \in \mathcal{V}G$ seien linksinvariante Vektorfelder auf G, das heißt $X(gh) = dL_g|_h X(h)$ für alle $g, h \in G$ (und analog für Y).
Zeigen Sie, dass dann auch die Lie-Klammer $[X, Y]$ ein linksinvariantes Vektorfeld auf G ist.

Aufgabe 3

(a) Es sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe und $U \subset G$ eine offene Umgebung von e. Zeigen Sie, dass G von U erzeugt wird (das heißt, G ist die kleinste Untergruppe, die U enthält).

(b) Zeigen Sie, dass $SO(n)$ zusammenhängend ist, aber $O(n)$ nicht.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem Vektorprodukt

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

eine Lie-Algebra ist, die isomorph ist zur Lie-Algebra von $SO(3)$.