Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Rafaela Dietrich

Geometrische Gruppentheorie II (WS 2013/14)
Übungsblatt 4

Aufgabe 1

Zeigen Sie: Für $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ gilt $\det(\mathrm{e}^A) = \mathrm{e}^{\mathrm{Spur}\, A}$.

Aufgabe 2

Es sei G eine n-dimensionale Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und $||\cdot||$ eine beliebige Norm auf $\mathfrak{g}$. Zeigen Sie für $X, Y \in D := \{X \in \mathfrak{g} : ||X|| \leq 1\}$:

(a) $\exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX) = \exp(tY + t^2[X,Y] + O(t^3))$

(b) $\exp(-\sqrt{t}X)\exp(-\sqrt{t}Y)\exp(\sqrt{t}X)\exp(\sqrt{t}Y) = \exp(t[X,Y] + O(t^{3/2}))$

(Das ist Korollar 1 zu Campbell-Baker-Hausdorff aus der Vorlesung.)

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Lie-Gruppen $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(2, 1)$ und $\mathrm{SU}(1, 1)$ lokal isomorph sind.

Aufgabe 4

Die *Heisenberg-Gruppe* ist die folgende 3-dimensionale Lie-Untergruppe $\mathrm{H}(3)$ von $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$:

$$\mathrm{H}(3) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die zugehörige Lie-Algebra $\mathfrak{h}(3) \cong \mathrm{T}_E\mathrm{H}(3)$ gegeben ist durch

$$\mathfrak{h}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u & w \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; u, v, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Die Campbell-Baker-Hausdorff-Formel für die Heisenberg-Gruppe:
Bestimmen Sie für $A, B \in \mathfrak{h}(3)$ und genügend kleines $t \in \mathbb{R}$ ein $C(t) \in \mathfrak{h}(3)$ mit

$$\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB} = \mathrm{e}^{C(t)}.$$