Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Rafaela Dietrich

Karlsruher Institut für Technologie

Geometrische Gruppentheorie II (WS 2013/14)
Übungsblatt 6

Aufgabe 1

Gegeben sei die folgende Bilinearform auf $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$Q(x,y) := (\sum_{i=1}^{n} x_i y_i) - x_{n+1}y_{n+1}.$$

Zeigen Sie, dass durch

$$\ll u, v \gg_x := Q|_{\mathrm{T}_x \mathrm{H}^n \mathbb{R}}(u,v), \qquad \forall u, v \in \mathrm{T}_x \mathrm{H}^n \mathbb{R}, \forall x \in \mathrm{H}^n \mathbb{R},$$

eine Riemannsche Metrik auf $\mathrm{H}^n\mathbb{R}$ gegeben ist.

Aufgabe 2

Es sei S ein symmetrischer Raum und $p \in S$.
Zeigen Sie: Der Punkt p ist isolierter Fixpunkt der geodätischen Spiegelung s_p. (Das heißt, es gibt eine Umgebung von p, in der kein weiterer Fixpunkt von s_p liegt.)

Aufgabe 3

Auf $\mathbb{R}^n$ sei folgende symmetrische Bilinearform gegeben:

$$Q(x,y) := -x_1y_1 - \ldots - x_py_p + x_{p+1}y_{p+1} + \ldots + x_ny_n.$$

Dann ist die (nicht-kompakte) Grassmann-Mannigfaltigkeit $\mathrm{Gr}^*_{p,n-p}(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$\mathrm{Gr}^*_{p,n-p}(\mathbb{R}^n) := \{U | U \ p\text{-dim. UVR}, \ Q|_U \text{ negativ definit}\}.$$

Die zu Q gehörende spezielle pseudo-orthogonale Gruppe ist

$$\mathrm{SO}(p, n-p) := \{A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \mid Q(Ax, Ay) = Q(x,y) \quad \forall x, y\}.$$

Zeigen Sie,

$$\mathrm{Gr}^*_{p,n-p}(\mathbb{R}^n) \cong \mathrm{SO}(p,n-p)/\mathrm{S}(\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(n-p)).$$

Was ist die Dimension von $\mathrm{Gr}^*_{p,n-p}(\mathbb{R}^n)$?