Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Rafaela Dietrich

Geometrische Gruppentheorie II (WS 2013/14)
Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (Ergänzung zu Lemma 2 in Abschnitt 5.2 der Vorlesung)

Es sei G eine Lie-Transformationsgruppe, die auf einer Mannigfaltigkeit M transitiv operiert. Es sei $p \in M$ und $G_p \subseteq G$ die Isotropiegruppe von p.
Zeigen Sie, dass die Abbildung $\alpha : G/G_p \to M$, $gG_p \mapsto g \cdot p$ differenzierbar ist.

Hinweis: Sei $\pi : G \to G/G_p$, die natürliche Projektion. Wie im Beweis von Satz 1, Kapitel 4 sei $D_\varepsilon \subset G$ so, dass $\pi|_{D_\varepsilon}$ ein Diffeomorphismus ist. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} D_\varepsilon \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\beta"] \\ \pi(D_\varepsilon) \arrow[r, "\alpha"] & M \end{tikzcd}$$

(mit $\beta(g) = g \cdot p$) und $\alpha|_{\pi(D_\varepsilon)}$ ist differenzierbar.

Aufgabe 2

Es sei G eine topologische Gruppe, G^0 die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements und $H \subseteq G$ eine Untergruppe von G. Zeigen Sie:

(a) G^0 ist eine normale Untergruppe von G.

(b) Sind H und G/H zusammenhängend, dann ist auch G zusammenhängend.

(c) Die Gruppe $\mathrm{SO}(2)$ ist zusammenhängend. Folgern Sie daraus mit Hilfe von Teil (b), dass $\mathrm{SO}(n)$ auch für jedes $n \geq 2$ zusammenhängend ist.