Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Sebastian Plenz

Geometrische Gruppentheorie (SS 2019)
Übungsblatt 10

Aufgabe 1

Für δ_1, $\delta_2 > 0$ sei (X_1, d_1) ein δ_1-hyperbolischer Raum und (X_2, d_2) ein δ_2-hyperbolischer Raum. Für $w_1 \in X_1$, $w_2 \in X_2$ sei Y die Verklebung von X_1 und X_2, die w_1 und w_2 miteinander identifiziert. Auf Y definieren wir eine Metrik d vermöge

$$d(x,y) := \begin{cases} d_i(x,y), & \text{falls } x,y \in X_i \text{ für } i = 1,2 \\ d_i(x,w_i) + d_j(w_j,y), & \text{falls } x \in X_i, y \in X_j \text{ und } i \neq j \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass Y wieder ein δ-hyperbolischer Raum (für ein $\delta > 0$) ist.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ von $T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $S := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ erzeugt wird.

(b) Wir betrachten die Menge $T_0 := \{\cos\theta + i\sin\theta : \theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]\}$ als geometrische Realisierung des Baumes, der aus zwei Ecken und einer Kante besteht.
Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \cdot T_0 := \{\gamma(T_0) : \gamma \in \rho(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))\}$ ein Baum ist (bzw. dessen geometrische Realisierung). Dabei sei $\rho : \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ die übliche Operation von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$ durch Möbiustransformationen.

Hinweis: Es sei $z \in T_0$: Zeigen Sie zunächst, dass aus $\gamma(T_0) \cap T_0 \neq \emptyset$ folgt, dass γ einen Randpunkt von T_0 fixiert. Dazu hilft es zu zeigen, dass für $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ gilt:

$$|(c^2 - d^2)\gamma(z) - (ac - bd)| = 1.$$

Dann zeigen Sie, dass $\mathrm{Re}(\gamma(z)) = 0 \Rightarrow z = i$.

(c) Zeigen Sie damit, dass die Untergruppe $\Gamma(2)$ von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, die von den Elementen $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugt wird, frei ist.

Aufgabe 3

Es seien G und H endlich erzeugte Gruppen. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) G ist endlich und H ist hyperbolisch. $\Longrightarrow$ $G \times H$ ist hyperbolisch.

(b) $G \times H$ ist nicht hyperbolisch. $\Longrightarrow$ G oder H ist nicht hyperbolisch.