Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Sebastian Plenz

Geometrische Gruppentheorie (SS 2019)
Übungsblatt 4

Aufgabe 1

Zeigen Sie: Jede Aktion einer endlichen Gruppe auf einem nichtleeren Baum hat einen globalen Fixpunkt. Das heißt, es gibt eine Ecke oder eine Kante, die von allen Elementen der Gruppe fixiert wird.

Aufgabe 2

(a) Es seien Gruppen G und H sowie folgende zwei Abbildungen von $Aut(G) \times Hom(G,H)$ nach $Hom(G,H)$ gegeben.

- $(\varphi, \psi) \mapsto \psi \circ \varphi$
- $(\varphi, \psi) \mapsto \psi \circ \varphi^{-1}$

Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, dass dadurch eine Gruppenoperation von $Aut(G)$ auf $Hom(G,H)$ definiert wird.

(b) Welche Gruppen operieren frei auf dem folgenden Graphen?

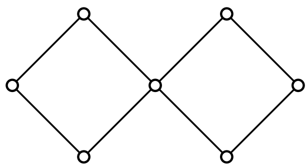

Abbildung 1: Graph zu Aufgabe 2

Aufgabe 3

Es sei G eine Gruppe und S ein Erzeugendensystem von G.
Weiter sei $\Gamma = \Gamma(G,S) = (V,E)$ der zugehörige Cayleygraph und $\rho : G \to \mathrm{Aut}(\Gamma)$ die Aktion von G auf Γ durch Linksmultiplikation, sowie $f_g := \rho(g)$.
Für eine Ecke v des Cayleygraphen sei $\mathrm{Stab}(v) := \{h \in \mathrm{Aut}(\Gamma) \mid h(v) = v\}$ die Stabilisatorgruppe von v.

Zeigen Sie:
Jedes Element h in $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ lässt sich eindeutig schreiben als $h = f_g \circ h_1$ mit $h_1 \in \mathrm{Stab}(id)$ und $g \in G$.