Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Sebastian Plenz

Geometrische Gruppentheorie (SS 2019)
Übungsblatt 6

Aufgabe 1

Es sei T ein Baum. Ein Automorphismus φ von T heißt *hyperbolisch*, falls er auf einem zu $Cay(\mathbb{Z},\{1\})$ isomorphen Teilbaum von T eine Operation durch nichttriviale Translationen induziert.
Dieser zu $Cay(\mathbb{Z},\{1\})$ isomorphe Teilbaum C_φ heißt *Achse* von φ.

Zeigen Sie: Sind φ und ψ zwei hyperbolische Automorphismen von T mit disjunkten Achsen, dann ist $\langle\varphi,\psi\rangle$ freie Untergruppe von $Aut(T)$.

(*Hinweis:* Ping-Pong!)

Aufgabe 2

Es seien (X,d_X), (Y,d_Y), (Z,d_Z) metrische Räume.

(a) Zeigen Sie: Sind $f:X\to Y$ und $g:Y\to Z$ Quasi-Isometrien, dann ist auch $g\circ f$ eine Quasi-Isometrie.

(b) Für zwei Abbildungen $f:X\to Y$ und $g:X\to Y$ gelte $f\sim g$ genau dann, wenn f und g endlichen Abstand haben. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation definiert..

(c) Sei $QI(X):=QI(X,d_X)$ die Menge der Äquivalenzklassen (bezüglich $\sim$) von Quasi-Isometrien $X\to X$. Zeigen Sie, dass $QI(X)$ mit der durch die Hintereinanderausführung induzierten Verknüpfung eine Gruppe wird.

(d) Zeigen Sie, dass eine Quasi-Isometrie $h:X\to Y$ einen Gruppenisomorphismus $QI(X)\to QI(Y)$ induziert.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass $QI(\mathbb{Z},|\cdot|)$ überabzählbar ist.

Hinweis: Finden Sie einen injektiven Homomorphismus $\varphi:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to QI(\mathbb{Z})$.