Karlsruher Institut für Technologie

**Fakultät für Mathematik**
**Institut für Algebra und Geometrie**
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Sebastian Plenz

# Geometrische Gruppentheorie (SS 2019)
# Übungsblatt 8

**Aufgabe 1 (Der Cayleygraph der Heisenberggruppe)**
Es sei $H$ die Heisenberggruppe, das heißt

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathrm{SL}(3,\mathbb{Z}).$$

Die Heisenberggruppe wird erzeugt von $S := \{x,y,z\}$ mit

$$x := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad y := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \qquad z := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie den Cayleygraphen von $H$ bezüglich $S$.

*Hinweis:* Dazu könnte das Ersetzen folgender Fragezeichen helfen:

- $(x^k y^l z^m)x = x^? y^? z^?$
- $(x^k y^l z^m)y = x^? y^? z^?$
- $(x^k y^l z^m)z = x^? y^? z^?$ mit $k,l,m \in \mathbb{Z}$.

**Aufgabe 2 (Die Wachstumsfunktion der Heisenberggruppe)**
Es seien $H$ und $S = \{x,y,z\}$ wie in Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(a) $d_S(e, x^k y^l z^m) \leq |k| + |l| + 6\sqrt{|m|}$ für alle $k,l,m \in \mathbb{Z}$.

(b) $d_S(e, x^k y^l z^m) \leq r \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |k| + |l| \leq r \\ |m| \leq r^2 \end{cases}$

(c) Die Wachstumsfunktion $\beta_{H,S}$ der Heisenberggruppe ist zu einem Polynom von Grad 4 äquivalent.

**Aufgabe 3**

Für zwei Gruppen $Q$ und $N$ mit einer Gruppenoperation $\varphi : Q \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ bildet das Kartesische Produkt zusammen mit der Verknüpfung

$$(N \times Q) \times (N \times Q) \longrightarrow (N \times Q)$$

$$((n_1, q_1), (n_2, q_2)) \longmapsto (n_1 \cdot \varphi(q_1)(n_2), q_1 \cdot q_2)$$

eine Gruppe. Diese Gruppe heißt *semidirektes Produkt von $Q$ mit $N$ bezüglich* $\varphi$ und wird mit $N \rtimes_\varphi Q$ notiert.

Nun sei $\quad \varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^2), \quad z \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^z \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad$ gegeben.

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}^2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ exponentielles Wachstum hat.

*Bemerkung:* Das ist ein Beispiel für eine auflösbare Gruppe, die nicht virtuell nilpotent ist.