

Geometrische Gruppentheorie (SS 2019)

Übungsblatt 9

Aufgabe 1

Für $z, w \in \mathbb{H}^2$ sei Ω_{zw} die Menge der differenzierbaren Kurven zwischen z und w .
Zeigen Sie:

(a) Durch

$$d_{\text{hyp}}(z, w) := \inf_{c \in \Omega_{zw}} L_{\text{hyp}}(c)$$

wird eine Metrik auf \mathbb{H}^2 definiert.

(b) Für die hyperbolische Metrik d_{hyp} aus a) gilt

$$\sinh\left(\frac{1}{2}d_{\text{hyp}}(z, w)\right) = \frac{|z - w|}{2\sqrt{\text{Im}(z)\text{Im}(w)}}.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie den hyperbolischen Kreis mit Radius r und Zentrum i

$$S_r(i) := \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d_{\text{hyp}}(z, i) = r\}.$$

Aufgabe 3 (Quasi-geodätischer Strahl)

Zeigen Sie: Die logarithmische Spirale

$$c : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t \cos(\ln(t+1)), t \sin(\ln(t+1)))$$

ist eine quasi-isometrische Einbettung in \mathbb{R}^2 bezüglich der euklidischen Metrik.