Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Petra Schwer
M.Sc. Julia Heller

(Sommersemester 2015)

Geometrische Gruppentheorie

Übungsblatt 2

Thema der Woche: Freie Gruppen

Hausaufgaben:

Aufgabe 1 (Rang einer freien Gruppe, *6 Punkte*)
Sei F eine freie Gruppe, S ein freies und T ein beliebiges Erzeugendensystem. Dann gilt:

a) $|T| \geq |S|$

b) Alle freien Erzeugendensysteme von F haben gleiche Kardinalität.

Aufgabe 2 (Endlich erzeugte Gruppen, *6 Punkte*)
Eine Gruppe G ist genau dann endlich erzeugt, wenn G Quotient einer endlich erzeugten freien Gruppe ist. Das heißt, es existiert eine natürliche Zahl n und ein Epimorphismus $F_n \to G$.

Aufgabe 3 (Präsentierung der trivialen Gruppe, *6 Punkte*)
Zeigen Sie, dass die Gruppe $\langle a, b |\ aba^{-1}b^{-2}, bab^{-1}a^{-2}\rangle$ trivial ist.

Präsenzaufgaben:

Aufgabe 4 (Alternative Konstruktion von freien Gruppen)
Sei S eine Menge und $F_{\text{red}}(S)$ die Menge der reduzierten Wörter über S.

a) Finden sie eine geeignete Verknüpfung auf $F_{\text{red}}(S)$, mit der $F_{\text{red}}(S)$ zu eine Gruppe wird und überprüfen Sie die Gruppenaxiome.

b) Zeigen Sie, dass $F_{\text{red}}(S)$ frei von S erzeugt ist.

c) In welchem Zusammenhang stehen die Gruppen $F_{\text{red}}(S)$ und $F(S)$? Wie lässt sich das begründen?

d) Erinnern Sie sich an die Definition der freien Gruppe $F(S)$ aus der Vorlesung. Zeigen Sie, dass jedes Element von $F(S)$ eindeutig durch ein reduziertes Wort repräsentiert werden kann.

e) Überlegen Sie sich, wie man eine freie Gruppe graphisch darstellen könnte.

Aufgabe 5 (Eine neue Basis für F_2)
Sei $F_2 = \langle a, b\rangle$ die von a und b erzeugte freie Gruppe. Zeigen Sie, dass $\{ab, aba\}$ ebenfalls ein freies Erzeugendensystem von F_2 ist.

Abgabe der Lösungen bis Mittwoch, den 29.04.15, in den Übungen.
Bitte heften Sie Ihre Abgabe zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen.