Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Petra Schwer
M.Sc. Julia Heller

(Sommersemester 2015)

Geometrische Gruppentheorie

Übungsblatt 3

Thema der Woche: Graphen

Hausaufgaben:

Aufgabe 1 (Gruppenpräsentierungen, *6 Punkte*)

a) Sei G eine Gruppe, die eine Präsentierung mit n Erzeugern und m Relationen besitzt. Ein weiteres Erzeugendensystem mit l Elementen sei durch T gegeben. Zeigen Sie, dass G durch $\langle T|R\rangle$ mit $|R| \leq m + l$ präsentiert werden kann.

b) Sei G eine Gruppe, die ein endliches Erzeugendensystem S besitzt, zu dem es keine endliche Menge an Relationen R gibt, so dass $G = \langle S|R\rangle$ gilt. Zeigen Sie, dass G nicht endlich präsentierbar ist.

Aufgabe 2 (Bäume, *6 Punkte*)
Sei X ein zusammenhängender Graph, T ein Baum und $p\colon X \to T$ ein lokal injektiver Morphismus, das heißt eine Abbildung, die Ecken auf Ecken und Kanten auf Kanten abbildet und Inzidenz erhält. Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen p injektiv und X ein Baum ist.

Aufgabe 3 (Ein Cayleygraph, *6 Punkte*)
Zeichnen Sie einen Ausschnitt des Cayleygraphen von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bezüglich der Erzeuger $(\overline{1}, 0)$ und $(\overline{0}, 1)$.

Präsenzaufgaben:

Aufgabe 4 (Cayleygraphen der D_n)
Zeichnen Sie den Cayleygraphen der Diedergruppe D_n für ein gewähltes n der beiden Präsentierungen $\langle r, s|\ r^n, s^2, srsr\rangle$ und $\langle s, t|\ s^2, t^2, (st)^n\rangle$. Sind die entstehenden Graphen isomorph? Was unterscheidet sie und was haben sie gemeinsam?

Aufgabe 5 (Cayleygraphen der S_3)
Zeichnen Sie die Cayleygraph für S_3 bezüglich der Erzeugendensysteme $T_1 = \{(1\,3), (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$, $T_2 = \{(1\,2), (1\,2\,3)\}$, $T_3 = \{(1\,2), (2\,3)\}$ und $T_4 = \{(1\,2), (2\,3), (1\,2\,3)\}$.

Aufgabe 6 (Cayleygraphen)
Überlegen Sie sich, wie der Cayleygraph Informationen über die Gruppe und Präsentierung codiert und umgekehrt. Einige Stichworte sind: benachbarte Ecken, Doppelkanten, Ecken, Erzeuger, Grad von Ecken, Größe der Gruppe, Kreise und Länge der Kreise, Relationen, Spiegelung, topologischer Zusammenhang.

Abgabe der Lösungen bis Mittwoch, den 05.05.15, in den Übungen.
Bitte heften Sie Ihre Abgabe zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen.