Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Petra Schwer
M.Sc. Julia Heller

(Sommersemester 2015)

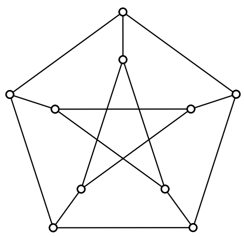
Geometrische Gruppentheorie

Übungsblatt 4

Thema der Woche: Cayleygraphen und Gruppenwirkungen

Hausaufgaben:

Aufgabe 1 (Petersen-Graph, *6 Punkte*)
Zeigen Sie, dass der folgende Graph nicht Cayleygraph einer Gruppe ist.



Aufgabe 2 (Wirkung auf $\mathrm{Cay}(G,S)$, *6 Punkte*)
Sei G eine Gruppe mit Erzeugendensystem S. Zeigen Sie, dass G durch Graphen-Isomorphismen via Linkstranslation auf seinem Cayleygraphen $\mathrm{Cay}(G,S)$ wirkt.

Aufgabe 3 (Burnside Lemma, *6 Punkte*)
Sei G eine endliche Gruppe, die auf der endlichen Menge X wirkt. Zeigen Sie, dass

$$|G\backslash X| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X^g|$$

gilt, wobei $X^g = \{x \in X |\ g.x = x\}$ die Fixpunktmenge von $g \in G$ ist.

Präsenzaufgaben:

Aufgabe 4 (Hamiltonkreise)
Ein *Hamiltonkreis* in einem endlichen Graphen ist ein Kreis, der jede Ecke enthält.

a) Zeigen Sie, dass für $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit $m, n \geq 2$ und $S = \{(1,0), (0,1)\}$ der Cayleygraph $\mathrm{Cay}(G,S)$ einen Hamiltonkreis enthält.

b) Zeigen Sie, dass jeder Cayleygraph einer endlichen Gruppe einen Hamiltonkreis enthält.

c) Was ändert sich in der Definition eines Hamiltonkreises, wenn man Cayleygraphen als gerichtete Graphen betrachtet? Finden Sie einen gerichteten Cayleygraphen, der keinen gerichteten Hamiltonkreis enthält.

Aufgabe 5 (Bahnensatz)
Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert. Zeigen Sie, dass für alle $x \in X$ die Abbildung

$$\begin{aligned} G/G_x &\to G.x \\ g \cdot G_x &\mapsto g.x \end{aligned}$$

wohldefiniert und bijektiv ist.