Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Petra Schwer
M.Sc. Julia Heller

(Sommersemester 2015)

Geometrische Gruppentheorie

Übungsblatt 5

Thema der Woche: Gruppenwirkungen freier Gruppen

Hausaufgaben:

Aufgabe 1 (Gruppenwirkungen auf Graphen, *6 Punkte*)

a) Zeigen Sie, dass ein endlicher Baum keinen Automorphismus besitzt, der inversions- und fixpunktfrei ist.

b) Sei G eine Gruppe, die auf einem beliebigen Graphen Γ wirkt. Zeigen Sie, dass G auf der baryzentrischen Unterteilung $\mathrm{Bary}(\Gamma)$ inversionsfrei wirkt.

Aufgabe 2 (Untergruppen freier Gruppen, *6 Punkte*)
Sei G eine Gruppe, die inversionsfrei auf einem Baum $\Gamma = (V, E)$ operiert. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

i) Für jede beschränkte Teilmenge $A \subseteq V$ ist $G.A$ beschränkt.

ii) Es existiert eine Ecke $v \in V$, so dass die Bahn $G.v$ beschränkt ist.

iii) Es gibt einen Fixpunkt $v \in V$.

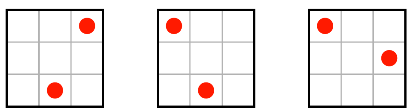
Aufgabe 3 (Fundamentalbäume, *6 Punkte*)
Es sei G eine Gruppe, gegeben durch $G = \langle x, y | \; x^4, x^2y^{-2}, yxy^{-1}x \rangle$.

a) Zeichnen Sie $\Gamma = \mathrm{Cay}(G, \{x, y\})$.

b) Bestimmen Sie die Fundamentalbäume der Wirkungen $\langle x \rangle \curvearrowright \Gamma$ und $\langle y \rangle \curvearrowright \Gamma$.

Präsenzaufgaben:

Aufgabe 4 (Lochkarten)
Wie viele 3×3 Lochkarten mit genau zwei Löchern gibt es, die sowohl unter Drehen als auch unter Wenden unterscheidbar sind?



Diese drei Konfigurationen gehören zur selben Lochkarte.

Hinweis: Das Burnside Lemma vom letzten Blatt ist hier hilfreich.

Aufgabe 5 (Untergruppen freier Gruppen)
Bestimmen Sie eine Basis von F_m als echte Untergruppe in $F = \langle x, y \rangle$ für alle $m \geq 2$.

Abgabe der Lösungen bis Mittwoch, den 20.05.15, in den Übungen.
Bitte heften Sie Ihre Abgabe zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen.