Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Petra Schwer
M.Sc. Julia Heller

(Sommersemester 2015)

Geometrische Gruppentheorie

Übungsblatt 6

Thema der Woche: Geometrie aus der Ferne

Hausaufgaben:

Aufgabe 1 (Eigenschaften von Quasi-Isometrien, *6 Punkte*)

a) Zeigen Sie, dass die Komposition von zwei Quasi-Isometrien eine Quasi-Isometrie ist. Bestimmen Sie die Quasi-Isometrie-Konstanten der Komposition.

b) Zeigen Sie, dass eine Abbildung, die endlichen Abstand zu einer Quasi-Isometrie hat, eine Quasi-Isometrie ist.

Aufgabe 2 (Äquivalenzrelationen, *6 Punkte*)
Eine (C, D)-Quasi-Isometrie heißt *strikt*, falls $D > 0$ ist.

a) Zeigen Sie, dass „quasi-isometrisch zu sein" eine Äquivalenzrelation ist.

b) Zeigen Sie, dass „strikt quasi-isometrisch zu sein" keine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 3 (Verschiedene Metriken, *6 Punkte*)

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, d_E)$ und $(\mathbb{R}^2, d_M)$ quasi-isometrisch sind, wobei die sogenannte *Manhattan-Metrik* durch $d_M((p_1, p_2), (q_1, q_2)) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|$ gegeben ist.

b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, d_E)$ und $(\mathbb{R}, d)$ nicht quasi-isometrisch sind, wobei die Metrik d durch $d(x, y) = d_E(x, y) \cdot (1 + d_E(x, y))^{-1}$ gegeben ist.

Präsenzaufgaben:

Aufgabe 4 (Quasi-Isometrien von $\mathbb{R}$)

a) Zeigen Sie, dass $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = t \cdot (\sin(\ln(1 + t)), \cos(\ln(1 + t)))$ eine quasi-isometrische Einbettung bezüglich der Standard-Metriken ist. Skizzieren Sie $f(\mathbb{R}_{\geq 0})$!

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$, jeweils ausgestattet mit der euklidischen Standard-Metrik, nicht quasi-isometrisch sind.

Aufgabe 5 (Isometrien, Bilipschitz-Äquivalenzen und Quasi-Isometrien)
Betrachte die Mengen $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Standard-Metrik. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Die Inklusionen $f\colon 2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ und $g\colon \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ sind quasi-isometrische Einbettungen.

b) Die Abbildungen $F\colon \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ und $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, definiert durch $F(x) = \begin{cases} x & x \in 2\mathbb{Z} \\ x-1 & x \notin 2\mathbb{Z} \end{cases}$ und $G(x) = \lfloor x \rfloor$, sind quasi-isometrische Einbettungen.

c) Die Abbildungen f und F bzw. g und G sind quasi-inverse Abbildungen, das heißt, sie haben endlichen Abstand zu den jeweiligen Identitäten.

d) $\mathbb{Z}$ und $2\mathbb{Z}$ sind bilipschitz-äquivalent.

e) $\mathbb{Z}$ und $2\mathbb{Z}$ sind nicht isometrisch.

f) $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Z}$ sind nicht bilipschitz-äquivalent und somit nicht isometrisch.