Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Petra Schwer
M.Sc. Julia Heller

(Sommersemester 2015)

Geometrische Gruppentheorie

Übungsblatt 7

Thema der Woche: Satz von Svarz-Milnor

Hausaufgaben:

Aufgabe 1 (Endliche Stabilisatoren, *6 Punkte*)
Sei X ein metrischer Raum und G eine Gruppe, die eigentlich auf X wirkt. Zeigen Sie, dass die Stabilisatoren $\mathrm{Stab}_G(x)$ für alle $x \in X$ endlich sind.

Aufgabe 2 (Keine Quasi-Isometrien, *6 Punkte*)

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 2$ die Gruppen F_n und $\mathbb{Z}$ nicht quasi-isometrisch sind.
b) Zeigen Sie, dass die Gruppen $\mathbb{Z}^m$ und $\mathbb{Z}^n$ nicht quasi-isometrisch sind, wenn $m \neq n$ ist.

Aufgabe 3 (Bijektive Quasi-Isometrien, *6 Punkte*)

a) Zeigen Sie, dass bijektive Quasi-Isometrien zwischen endlich erzeugten Gruppen Bilipschitz-Äquivalenzen sind.
b) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen eine bijektive Quasi-Isometrie keine Bilipschitz-Äquivalenz ist.

Präsenzaufgaben:

Aufgabe 4 (Quasi-Isometrie-Invarianz?)
Seien X und Y metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Quasi-Isometrie. Beantworten Sie die folgenden Fragen, indem Sie sich zunächst (Gegen-)Beispiele überlegen und anschließend Ihre Antworten begründen.

a) Wenn X geodätisch ist, ist dann auch Y geodätisch?
b) Wenn X geodätisch ist, ist dann Y quasi-geodätisch?
c) Wenn X quasi-geodätisch ist, ist dann Y quasi-geodätisch?

Aufgabe 5 ($\mathbb{R}^2$ mit Löchern)
Sei $X = \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{Z}^2$ mit der von der Standard-Metrik von $\mathbb{R}^2$ induzierten Metrik.

a) Zeigen Sie, dass X für alle $D > 0$ ein $(1, D)$-quasi-geodätischer Raum ist.
b) In welchem Sinne sind die Quasi-Geodäten von X „nahe“an den Geodäten von $\mathbb{R}^2$, wenn X als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ betrachtet wird?
c) Finden Sie eine Quasi-Geodäte in $\mathbb{R}^2$, die nicht „nahe “an Geodäten ist.

Aufgabe 6 (Geometrische Realisierung von Graphen)
Sei Γ ein zusammenhängender Graph mit Eckenmenge V, ausgestattet mit der kombinatorischen Metrik.

a) Überzeugen Sie sich davon, dass die geometrische Realisierung $|\Gamma|$ von Γ ein geodätischer metrischer Raum ist.

b) Zeigen Sie, dass die kanonische Abbildung $V \to |\Gamma|$ eine Quasi-Isometrie ist.

c) Zeigen Sie, dass es für jeden quasi-geodätischen Raum X einen geodätischen Raum Y und eine Quasi-Isometrie $X \to Y$ gibt.
Hinweis: Konstruieren Sie einen Graphen mit Eckenmenge X und finden Sie eine geeignete Bedingung, wann zwischen zwei Ecken eine Kante existiert. Nutzen Sie dann für die restliche Argumentation die beiden vorherigen Teilaufgaben.